КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З КУРСУ "Диференціальні рівняння"

За редакцією
академіка НАН України М. О. Перестюка

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів університетів,
які навчаються за напрямом підготовки "Математика"

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2011

УДК 517.9
ББК 22.161.6я73
З641

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. А. Бойчук,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. І. Клесов,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. М. Станжицький

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 4 від 14 грудня 2009 року)

З641 Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О. В. Капустян [та ін.] ; за ред. М. О. Перестюка. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 79 с.

ISBN 966-06-0249-9

Навчальний посібник містить понад 200 задач із нормативного курсу "Диференціальні рівняння". Однак на відміну від інших аналогічних видань, які спрямовані на забезпечення студентів різними за умовою, але типовими по суті задачами, до збірника увійшли складні, нетипові та нестандартні задачі. До всіх задач наведено вказівки й відповіді.

Для студентів вищих навчальних закладів.

УДК 517.9
ББК 22.161.6я73

ISBN 966-06-0249-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Свої початки диференціальні рівняння беруть ще з XVII — XVIII століть, коли І. Ньютон уперше запропонував застосовувати їх для опису різноманітних природних явищ та законів і насамперед законів руху. Поняття "aequatio differentialis" або "диференціальне рівняння" вперше введено видатним німецьким математиком Г. Лейбніцем у 1676 році.

Сучасна теорія диференціальних рівнянь — це багаторівнева система знань із розгалуженою внутрішньою структурою, різноманітними зв'язками з іншими розділами математики, розвинутим поняттєвим апаратом, потужним арсеналом аналітичних, геометричних та чисельних методів, багато з яких є надзвичайно корисними для практичних застосувань, і тому нам залишається тільки дивуватися прозорливості Ньютона, який основне своє відкриття видав у вигляді анаграми: "Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa", що в перекладі на сучасну математичну мову звучить так: "Корисно розв'язувати диференціальні рівняння".

Дійсно, дуже важко уявити собі досвідченого сучасного інженера, фізика або, тим більше, математика без знання теорії диференціальних рівнянь і навичок їх розв'язування.

За останні роки видано значну кількість різноманітних збірників задач з диференціальних рівнянь, які в тому чи іншому обсязі охоплюють основні розділи теорії диференціальних рівнянь, що складають базовий університетський курс.

Більшість цих збірників спрямовано на забезпечення студентів різними за умовою, але типовими по суті задачами. Це пов'язано з тим, що практичний бік курсу диференціальних рівнянь за традиційного викладання насамперед базується на засвоєнні техніки інтегрування різноманітних класів рівнянь. Водночас досвід викладання на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка свідчить про щорічне збільшення чисельності студентів, які прагнуть випробувати свої сили в розв'язанні більш складних, нетипових і нестандартних задач.

Саме цей факт разом із природним прагненням підвищення рівня підготовки студентів, залучення їх до наукової творчості, спричинив появу цього посібника.

У збірник увійшли задачі підвищеної складності зі збірників задач [2, 3, 8, 12, 16, 19], вибрані вправи з підручників [1, 4, 6, 9, 13, 14, 17, 20], задачі з диференціальних рівнянь, які пропонувалися в різні роки на студентських олімпіадах як в Україні, так і за її межами [15], авторські задачі. Посібник написаний з урахуванням багаторічного досвіду та традицій викладання базового курсу диференціальних рівнянь та проведення занять гуртка з диференціальних рівнянь викладачами кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Посібник складається із двох частин. Перша містить тексти задач, рівень складності яких сильно варіюється. У кожному параграфі є декілька відносно простих задач, а також досить складні задачі, розв'язання яких ґрунтується на синтезі ідей диференціальних рівнянь і математичного аналізу, алгебри та геометрії, так що студентам доведеться використати весь набір набутих математичних навичок. Розв'язання таких задач (вони помічені в тексті посібника двома зірочками

**) передбачає глибоке неформальне розуміння як безпосередньо самого курсу диференціальних рівнянь, так і природи математичних об'єктів та їх взаємозв'язків, і може слугувати предметом курсової роботи на другому курсі для студентів математичних спеціальностей.

До кожної з наведених у збірнику задач можна знайти вказівку, а також відповідь (якщо задача її допускає). Зазначимо також, що вказівки до задач мають на меті спрямувати хід думок уважного читача у вірне русло, а не зробити твердження задачі очевидним, тобто, даючи ключ до розв'язання, все ж залишають за читачем значну частину роботи.

У цілому структура збірника відповідає програмі нормативного курсу "Диференціальні рівняння", що викладається на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Збірник можна вважати другим розширеним і доповненим виданням методичного посібника "Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності" (Київ, "ТВіМС", 2005). Порівняно із цим виданням більш ніж удвічі збільшено кількість запропонованих задач, суттєво вдосконалено і доповнено вказівки і відповіді.

Розділ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

1. Дослідити графік функції $y(t)$, якщо

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 1 + \sin^2 y(t), \ t \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Накреслити інтегральні криві рівнянь:

а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{|xy|}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{|x+y|}{x+y}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{при } y \neq x, \\ 1, & \text{при } y = x; \end{cases}$ д) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{при } y \neq x, \\ 0, & \text{при } y = x. \end{cases}$

3. Знайти рівняння геометричного місця точок:

а) яке заздалегідь містить усі точки максимуму і мінімуму розв'язків рівняння $y' = f(x, y)$;

б) яке заздалегідь містить усі точки перегину, якщо функція $f(x, y)$ диференційовна.

4. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівнянь:

а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}}$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; д) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$;

е) $\dfrac{dy}{dx} = x^a \sin \dfrac{1}{x}$ — при різних значеннях параметра a.

З'ясувати картину поведінки цих інтегральних кривих при $x \to 0$.

5. Показати, що кожна інтегральна крива рівняння

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

має дві горизонтальні асимптоти.

6. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$

в околі початку координат. Показати, що з кожної точки границі першого координатного кута виходить одна інтегральна крива, яка проходить усередині цього кута.

7. Нехай $f(y)$ неперервна при $a < y < b$ та $\varphi(x) \to c$ при $x \to +\infty$ $(a < c < b)$ для деякого розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(y)$. Довести, що тоді $y = c$ є розв'язком цього рівняння.

8. Нехай $M_i = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \le x^2, (-1)^i x > 0\Big\}$, $i = 1, 2$. Довести, що кожну точку множини M_1 можна сполучити інтегральною кривою рівняння $y' = \sqrt[3]{xy}$ із кожною точкою множини M_2.

9. Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, $\rho \in C(\mathbb{R})$, $\rho(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Довести, що якщо $y(x)$ та $z(x)$ є непродовжуваними розв'язками задач Коші

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = a \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} z' = f(z)\rho(z), \\ z(0) = a \end{cases}$$

відповідно, то $\bigcup\limits_{x\in D(y)}\{y(x)\} = \bigcup\limits_{x\in D(z)}\{z(x)\}$, де $D(y)$ — область визначення функції y.

10. Довести, що інтегральні криві рівняння

$$\left(2x\left(x^2-axy+y^2\right)-y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+$$

$$+y\left(2\left(x^2-axy+y^2\right)+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0 \quad (|a|<2)$$

є замкненими лініями, що охоплюють точку $(0,0)$.

11. З'ясувати, при яких p,q рівняння $y'=ax^p+by^q$ є квазіоднорідним.

12. З'ясувати, під яким кутом інтегральні криві рівняння $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ перетинають промінь $y=kx$.

13*. Дослідити поведінку інтегральних кривих таких рівнянь:

а) $xyy'+x^2=2y^2$; б) $xy'=y+\sqrt{y^2+\dfrac{y^3}{x}}$.

14*. Нехай $f(x)=\dfrac{4x}{3-y(x)}$, де $y(x)$ — розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y'(1+x^2)(1-y)=2xy(x^2+2), \\ y(1)=-2. \end{cases}$$

Знайти найбільше значення $f(x)$.

15. При яких умовах на $a\in\mathbb{R}$, $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, для диференціального рівняння $\dot{x}=ax^{1/3}+f(x)$ має місце єдиність розв'язку задачі Коші?

16. Довести, що всі розв'язки рівняння $y'=f(y)$ із неперервною правою частиною монотонні.

17. Нехай f — неперервна в околі точки $y = c$, $f(c) = 0$ та як завгодно близько від $y = c$, як при $y < c$, так і при $y > c$, знайдуться значення y, при яких $f(y) > 0$, і знайдуться значення y, при яких $f(y) < 0$. Довести, що тоді через будь-яку точку (x_0, c) проходить єдиний розв'язок $y = c$ рівняння $y' = f(y)$. Навести приклад такої функції f.

18*. Чи може розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

де $f \in C(\mathbb{R})$, мати властивості: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ та множина $\{x \geq 0 : \ y'(x) = 0\}$ містить необмежену відкриту множину?

19**. Навести приклад рівняння $y' = f(y)$ із неперервною правою частиною, серед розв'язків якого знайдуться два, що мають такі властивості: вони визначені для всіх x, монотонно зростають, а їх графіки мають єдину спільну точку.

20**. Побудувати приклад двох рівнянь $y' = f_1(y)$ і $y' = f_2(y)$ із неперервними невід'ємними правими частинами, для яких через кожну точку площини проходить єдина інтегральна крива, і притому таких, що для рівняння $y' = \max\{f_1(y), f_2(y)\}$ ця єдиність не гарантується.

1.2. Лінійні рівняння, рівняння Бернуллі та Ріккаті

21. Нехай у рівнянні $xy' + ay = f(x)$ маємо $a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що лише один розв'язок рівняння залишається обмеженим при $x \to 0$ і знайти границю цього розв'язку при $x \to 0$.

22. Нехай у рівнянні попередньої задачі $a = \text{const} < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що всі розв'язки цього рівняння мають одну й ту саму скінченну границю при $x \to 0$. Знайти цю границю.

23. Показати, що рівняння $\dfrac{dx}{dt} + ax = f(t)$, де $a > 0$, $|f(t)| \leq M$, при $-\infty < t < +\infty$ має єдиний, обмежений при $-\infty < t < +\infty$, розв'язок. Показати, що знайдений розв'язок є періодичним, якщо функція $f(t)$ періодична.

24. Показати, що лише один розв'язок рівняння $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ прямує до скінченної границі при $x \to \infty$. Знайти цю границю.

25. Нехай у рівнянні $\dfrac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$, $a(t) \geq c > 0$. Довести, що з обмеженості функції f на $[0; +\infty)$ випливає обмеженість будь-якого розв'язку цього рівняння на $[0; +\infty)$. Показати також, що якщо $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $t \to \infty$.

26. Нехай у рівнянні попередньої задачі маємо $a(t) \geq c > 0$ і нехай $x_0(t)$ — розв'язок із початковою умовою $x_0(0) = b$.

Показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що якщо змінити функцію $f(t)$ та число b менше ніж на δ (тобто замінити їх на таку функцію $f_1(t)$ і число b_1, що $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$), то розв'язок $x_0(t)$ зміниться при $t \geq 0$ менше ніж на ε. Ця властивість називається *стійкістю за постійно діючим збуренням.*

27. Нехай $a(x)$, $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $a(x) \geq 0$, $f(x) = o(a(x))$ при $x \to +\infty$ та $\int\limits_0^\infty a(x)dx = \infty$. Довести, що для кожного розв'язку $y(x)$ рівняння $y' + a(x)y = f(x)$ виконується $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

28. Нехай функції $p, q, r \in C([a,b])$, $p(a) = p(b) = 0$, для всіх $x \in (a,b)$ виконуються нерівності $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ та

$$\int\limits_a^{a+\varepsilon} \frac{ds}{p(s)} = \int\limits_{b-\varepsilon}^{b} \frac{ds}{p(s)} = +\infty.$$

Довести:

1) всі розв'язки рівняння $p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$, що існують на (a,b), прямують до $\dfrac{r(b)}{q(b)}$ при $x \to b$;

2) серед цих розв'язків один прямує до $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x \to a$, інші при $x \to a$ необмежені.

29. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

30. Нехай функції $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють умови $f \geq 0$, $f' \geq 0$, $g > 0$, $g' > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = A$,

$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = B$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ та справедлива рівність

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

31. Розв'язати рівняння Міндінга — Дарбу

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(xdy - ydx) = 0,$$

де M, N — однорідні функції степеня m, R — однорідна функція степеня n.

32. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ — T-періодичні розв'язки рівняння $y' = y^2 + f(x)$, $f \in C(\mathbb{R})$. Довести, що $\int\limits_0^T (y_1(x) + y_2(x))dx = 0$.

33. Довести, що для будь-яких чотирьох частинних розв'язків рівняння Ріккаті має місце тотожність

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv \mathrm{const}\,.$$

34. Довести, що рівняння Ріккаті

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x)$$

із T-періодичними неперервними коефіцієнтами не може мати більше двох T-періодичних розв'язків. Навести приклад рівняння Ріккаті, що має рівно два періодичні розв'язки.

35. Для рівняння Ріккаті $y' = \big(y - \alpha(x)\big)^2$, де $\alpha \in C(\mathbb{R})$, $\alpha(x) \in [m, M]$ при $x \in \mathbb{R}$, показати, що розв'язок задачі Коші з початковими даними $y(x_0) = y_0$, де $y_0 > M$, має такі властивості:

$$y(x) \to \infty, \quad x \to x_1 > x_0;$$
$$y(x) \to m_1 \geq m, \quad x \to -\infty.$$

36. Для рівняння з попередньої задачі показати, що графік розв'язку $y = y(x)$ задачі Коші з початковими даними $y(x_0) = y_0$, де $y_0 < m$, або перетинає криву $y = \alpha(x)$, або $\alpha(x) - y(x) \to 0$, $x \to \infty$, і в цьому випадку $y(x) \to -\infty$, $x \to x_2 < x_0$.

1.3. Існування, єдиність і продовжуваність розв'язку

37. Знайти максимальний проміжок існування розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} y' = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

і збіжності послідовних наближень, який забезпечує теорема Пікара.

38. Нехай

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \ -\infty < y < +\infty, \\ 2x, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ -\infty < y < 0, \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ 0 \le y \le x^2, \\ -2x, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ x^2 < y < +\infty. \end{cases}$$

Довести, що наближення Пікара, побудовані для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

не збігаються на жодному проміжку $[0, \varepsilon]$.

39. Нехай $f \in C(\mathbb{R}^2)$ та існують невід'ємні функції $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R})$ такі, що для довільних $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ виконується нерівність $|f(x,y)| \le g_1(x)|y| + g_2(x)$. Довести, що кожен розв'язок рівняння $y' = f(x,y)$ існує на $\mathbb{R}$.

40. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \sin(xy)y - y^3, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

існує для всіх $x \ge 0$.

41. Чи існує розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

а) на $[-1; 1]$; б*) на $[-2; 2]$?

42. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

існує на $[x_0; +\infty)$.

43. Показати, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \sin^2(y - x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

існує на $\mathbb{R}$.

44. Визначити максимальний інтервал існування розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

45. Довести, що кожний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 + t^4 + \cos x}$$

існує та обмежений на $\mathbb{R}$.

46. Нехай D — опукла область у $\mathbb{R}^2$, $f \in C(D)$, графіки неперервно диференційовних функцій $\xi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ і $\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ лежать у D, причому для всіх $x \in [\alpha, \beta]$

мають місце нерівності $\xi(x) > \eta(x)$, $\dot{\xi}(x) < f\big(x, \xi(x)\big)$, $\dot{\eta}(x) > f\big(x, \eta(x)\big)$. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(\alpha) = y_0, \end{cases}$$

де $y_0 \in [\eta(\alpha), \xi(\alpha)]$, існує на $[\alpha, \beta]$ і задовольняє нерівність $\eta(x) \le y(x) \le \xi(x)$.

47*. При яких a кожний розв'язок рівнянь продовжується на нескінченний інтервал $-\infty < x < +\infty$:

а) $y' = |y|^a$; б) $y' = (y^2 + e^x)^a$;

в) $y' = |y|^{a-1} + \Big(\big(x\sqrt[3]{y}\big)^2\Big)^a$?

48*. Нехай функція $f(k)$ неперервно диференційовна в околі точки k_0 і $y = k_0 x$ — розв'язок рівняння $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Показати, що

а) якщо $f'(k_0) < 1$, то жодний з інших розв'язків не дотикається до прямої $y = k_0 x$ у початку координат;

б) якщо $f'(k_0) > 1$, то до цієї прямої дотикається нескінченно багато розв'язків.

49. Довести твердження:

а) розв'язок рівняння $y' = xy + e^{-y}$ із довільною початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$;

б*) якщо на всій площині x, y функції $f(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ неперервні і $f'_y(x, y) \le k(x)$, де функція $k(x)$ неперервна, то розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ із будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$.

50. Нехай функція $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ періодична по t із періодом $T>0$. Довести, що якщо існує єдиний розв'язок рівняння $\dot{x}=f(x,t)$, що обмежений на всій осі, то він періодичний із періодом T.

51. Нехай $f(x,y)$ неперервна по x,y і при кожному x не зростає при збільшенні y. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y'=f(x,y)$ задовольняють одній і тій самій початковій умові $y(x_0)=y_0$, то вони однакові при $x \geq x_0$.

52*. `Задача О. А. Олейник.` Нехай $f(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$, існує $T>0$ таке, що $f(x+T,y) \equiv f(x,y)$, та існують $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R},\ y_1 \neq y_2$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ справедлива нерівність $f(x,y_1)f(x,y_2)<0$, функція f ліпшицова по y. Довести, що існує T-періодичний розв'язок рівняння $y'=f(x,y)$.

53*. Довести твердження попередньої задачі без умови Ліпшиця.

54*. Довести `теорему Осгуда`: нехай функція $f(x,y)$ для будь-якої пари точок $(x,y_1),\ (x,y_2)$ області G задовольняє умову $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq \Phi(|y_1-y_2|)$, де $\Phi(u)>0$ при $0<u\leq c$, неперервна і така, що $\int\limits_{\varepsilon}^{c} \dfrac{du}{\Phi(u)} \to \infty$, коли $\varepsilon \to 0$. Довести, що через кожну точку (x_0,y_0) області G проходить не більше однієї інтегральної кривої рівняння $y'=f(x,y)$.

55*. Нехай у рівнянні $\dot{x}=f(t,x)$ функція $f \in C([a,+\infty)\times \times(c,d))$ і для всіх $\xi \in (c,d)$ (можливо за винятком зліченної кількості точок) знайдеться таке t_ξ, що для кожного $t \geq t_\xi$ або $f(t,\xi) > 0$, або $f(t,\xi) < 0$. Довести, що якщо функція $x : [a, +\infty) \to (c, d)$ є розв'язком цього рівняння, то існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

56. Нехай функція $f \in C([0;+\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. Визначимо $z(t) = \dfrac{e^{\int_0^t f(s)ds}}{\int\limits_0^t e^{\int_0^s f(\tau)d\tau} ds}$. Довести, що існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ та знайти значення цієї границі.

57*. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x - y^2, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

де x_0, $y_0 > 0$, існує на $[x_0; +\infty)$ і задовольняє умову $\lim\limits_{x\to\infty} (y(x) - \sqrt{x}) = 0$.

58. Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ і $\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Довести, що f — стала.

59**. Побудувати приклад неперервної на площині функції $f(x,y)$ такої, що будь-яка точка (x_0, y_0) є точкою неєдиності задачі Коші

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1.4. Диференціальні нерівності

60. Довести `лему Адамара`: нехай для обмеженої функції $x : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ існує обмежена на $[t_0, +\infty)$ друга похідна $x''(t)$. Тоді, якщо $x(t) \to \overline{x},\ t \to +\infty$, то $x'(t) \to 0$, $t \to +\infty$.

61. Довести `лему Ландау`: нехай для функції $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, де $b - a \geq 2$, існує друга похідна $x''(t)$, і для всіх $t \in [a, b]$ виконуються нерівності $|x(t)| \leq 1,\ |x''(t)| \leq 1$. Тоді для кожного $t \in [a, b]$ має місце оцінка $|x'(t)| \leq 2$, причому ця оцінка точна.

62. Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}),\ f(x) > 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ та $f'(x) > f(x)$ при всіх x. Для яких k існує N таке, що $f(x) > e^{kx}$ при $x > N$?

63. Нехай $f \in C^{(1)}([a; b]),\ f(a) = 0$ та, крім того, існує $\lambda > 0$ таке, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $|f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$. Чи вірно, що $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$?

64. Довести `нерівність Гронуолла - Беллмана`: нехай $u(t) \geq 0$ та $f(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$ та $u(t),\ f(t) \in C([t_0; +\infty))$, причому при $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$u(t) \leq C + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) u(\tau) d\tau,$$

де C — додатна стала. Тоді при $t \geq t_0$ маємо $u(t) \leq C \exp \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$.

65. Довести аналог леми Гронуолла — Беллмана: нехай $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t) \in C([a;b])$ та $\chi(t) > 0$ при $a \le t \le b$, причому $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_a^t \varphi(s)\chi(s)ds$, $a \le t < b$. Тоді $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_a^t \psi(s) \exp\bigl[\int\limits_s^t \chi(\tau)d\tau\bigr]\chi(s)ds$ при $a \le t \le b$.

66. Довести `лему Біхарі`: нехай $u(t) \ge 0$ і $f(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$, причому $u(t), f(t) \in C([t_0, \infty))$ та має місце нерівність

$$u(t) \le C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Phi(u(s))ds,$$

де C — додатна стала та $\Phi(u)$ — додатна неперервна неспадна функція при $0 < u < \overline{u} \le \infty$, і нехай

$$\Psi(u) = \int\limits_C^u \frac{dv}{\Phi(v)} \quad (0 < u < \overline{u}).$$

Тоді, якщо

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds < \Psi(\overline{u} - 0) \quad (t_0 \le t \le \infty),$$

то при $t_0 \le t \le \infty$ справедлива нерівність

$$u(t) \le \Psi^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right],$$

де $\Psi^{-1}(u)$ — функція, обернена до $\Psi(u)$.

Записати лему Біхарі для функцій $\Phi(u) = u^m$, де $m > 0$ — параметр.

67. Нехай $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперервна функція. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + f(x)\sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

існує на $[0,+\infty)$ і оцінити його.

68. Нехай задано функції $y, z, u \in C^{(1)}([x_0, b])$, причому $y(x_0) = z(x_0) = u(x_0) = y_0$, де точка (x_0, y_0) належить деякій області, в якій означена і неперервна функція $f = f(x, y)$. Нехай для кожного $x \in [x_0, b)$ виконується

$$y'(x) = f(x, y(x)), \;\; z'(x) > f(x, z(x)), \;\; u'(x) \geq f(x, u(x)).$$

Довести, що для всіх $x \in (x_0, b)$ справедлива нерівність $z(x) > y(x)$. Якщо, крім того, через будь-яку точку $(x, y(x))$ проходить єдина інтегральна крива $y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, то для кожного $x \in [x_0, b)$ виконується нерівність $u(x) \geq y(x)$. Показати, що умова єдиності істотна.

69. Нехай $a(t), b(t) > 0$ — неперервні на $[0;+\infty)$ функції, $u(t)$ — неперервна і $u^2(t) \leq a(t) + 2\int\limits_0^t b(s)u(s)ds, \; t \geq 0.$

Показати, що $u(t) \leq \sqrt{\sup\limits_{s\in[0,t]} a(s)} + \int\limits_0^t b(s)ds, \quad t \geq 0.$

1.5. Рівняння в повних диференціалах та інтегрувальний множник

70. Знайдіть інтегрувальний множник для лінійного рівняння, що записано у вигляді

$$dy - [a(x)y + b(x)]dx = 0.$$

71. Нехай рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

має інтегрувальний множник $\mu(x,y)$, після множення на який його ліва частина перетворюється на повний диференціал деякої функції $z(x,y)$. Доведіть, що за цих умов функція $\mu(x,y) \cdot f(z(x,y))$, де $f(z)$ — довільна неперервна функція від z, що не обертається на 0, буде також інтегрувальним множником цього рівняння.

72. Нехай $M(x,y)$ та $N(x,y)$ є двічі неперервно диференційовними в прямокутнику $Q = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$, причому $N \neq 0$. Доведіть, що за цієї умови для існування в Q неперервного інтегрувального множника $\mu \neq 0$ для рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

що залежить лише від x, необхідно і достатньо, аби в Q

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \equiv \frac{\partial N}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

73. Доведіть, що якщо рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

із неперервно диференційовними коефіцієнтами $M(x, y)$, $N(x, y)$, які задовольняють умову $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ і задані в однозв'язній області, має замкнену інтегральну криву, то всередині цієї кривої знайдеться принаймні одна точка (x_0, y_0), для якої $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$.

74. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0.$$

75. За яких умов рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

має інтегрувальний множник у формі $\mu(x, y) = h(xy)$?

1.6. Різні задачі

76. Знайти всі $f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ такі, що для довільного $x \in \mathbb{R}$

$$(f(x))^2 = \int\limits_0^x \big(f^2(t) + (f'(t))^2\big)dt + 2011.$$

77. Знайти найбільшу можливу кількість періодичних розв'язків, відмінних від константи, із попарно несумірними періодами, яку може мати рівняння $y' + a(x)y = f(x)$, де $a(\cdot),\ f(\cdot) \in C(\mathbb{R})$.

78. Довести, що рівняння Абеля

$$y' = y^3 + p_1(x)y^2 + p_2(x)y + p_3(x)$$

із T-періодичними неперервними коефіцієнтами не може мати більше трьох T-періодичних розв'язків. Навести приклад рівняння Абеля, що має рівно три T-періодичні розв'язки.

79. `Задача І. С. Фещенка.` Чи може рівняння $y' = y^3 + f(x)$, де $f \in C(\mathbb{R})$ — T-періодична функція, мати два різні T-періодичні розв'язки?

80. Нехай $f(x)$ — дійсна неперервна періодична функція, що визначена на всій числовій прямій. Чи вірно, що диференціальне рівняння $y' = (y^2 - 1)(y - f(x))$ має періодичний розв'язок, відмінний від сталої?

81*. Нехай $x = \varphi(t)$ — обмежений при $t \geq 0$ $(t \leq 0)$ розв'язок рівняння $\dot{x} = f(x,t)$, де функція $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(x, t+T) \equiv f(x,t)$ і задовольняє умови, що забезпечують єдиність розв'язку задачі Коші для довільних початкових даних $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Довести, що тоді або $\varphi(\cdot)$ — T-періодичний, або $\varphi(\cdot)$ асимптотично наближається до деякого T-періодичного розв'язку при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$).

82. Нехай $f, f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$, $f'_y(x,y) > 0$ і $f(x+T, y) \equiv f(x,y)$. Довести, що тоді рівняння $y' = f(x,y)$ не може мати більше одного T-періодичного розв'язку.

83. Знайти розв'язки рівняння $f'(x) + xf(-x) = P$, $P \in \mathbb{R}$.

84*. Нехай K — компактна підмножина півплощини $\{(x,y)|\ y > 0\}$. Довести, що існує точка $A \in \{(x,y)|\ y > 0\}$, яка має таку властивість: будь-яку точку K можна з'єднати з точкою A інтегральною кривою рівняння $y' = e^{x^2}\sqrt{\ln(1+|y|)}$, $x \in \mathbb{R}$.

85*. Задано рівняння $\dot{x} = f(x)$, $f \in C(\mathbb{R})$. Довести, що для того, щоб для всіх $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ мала місце гранична рівність $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t,x_0) - x(t,y_0)| = 0$, достатньо виконання однієї з трьох умов:

1) існує таке $a^* \in \mathbb{R}$, що $f(a^*) = 0$ та $f(a) > 0$ при $a \in (-\infty, a^*)$, $f(a) < 0$ при $a \in (a^*, +\infty)$;
2) для кожного $a \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $f(a) > 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = 0$;
3) для кожного $a \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $f(a) < 0$, $\lim\limits_{a\to-\infty} f(a) = 0$.

Чи будуть ці умови й необхідними?

86*. Задано рівняння $\dot{x} = f(x)$, $f \in C(\mathbb{R}_+)$. Довести, що для того, щоб для всіх $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ мала місце гранична рівність $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x(t,x_0)}{x(t,y_0)} = 1$, достатньо виконання однієї з трьох умов:

1) існує таке $a^* > 0$, що $f(a^*) = 0$, $f(a) > 0$ при $a \in (0, a^*)$ та $f(a) < 0$ при $a \in (a^*, +\infty)$;

2) для довільного $a > 0$ виконується $f(a) > 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{f(a)}{a} = 0$;

3) для довільного $a > 0$ виконується $f(a) < 0$, $\lim\limits_{a\to0+} \dfrac{f(a)}{a} = 0$.

Чи будуть ці умови й необхідними?

87. Нехай $f \in C^{(1)}([0,\pi])$ і виконана одна з двох умов $f(0) = f(\pi)$ або $\int\limits_0^\pi f(x)dx = 0$. Довести нерівність
$$\int\limits_0^\pi f^2(x)dx \le \int\limits_0^\pi (f'(x))^2 dx.$$

88. Нехай $P(x,y), Q(x,y)$ — алгебраїчні многочлени степеня не більше ніж n, і $y = \varphi(x)$ — розв'язок рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ на $[a,b]$, причому $Q(x,\varphi(x)) \ne 0$. Довести, що довільна пряма або дотикається до графіка функції $y = \varphi(x)$, або має з ним не більше ніж $n+1$ точку перетину.

89. Нехай $K(x,y) \in C([a,b]\times[a,b])$, $f, g \in C([a,b])$, $K, f, g > > 0$. Припустимо, що
$$f(x) = \int\limits_a^b K(x,y)g(y)dy, \quad g(x) = \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy.$$
Показати, що $f(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

90. Навести приклад того, що теореми про існування та продовжуваність розв'язку задачі Коші не мають місця для рівнянь із розривною по фазовій змінній правою частиною.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ І СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Фазові портрети

91. Довести, що якщо особлива точка рівняння

$$(ax+by)dx+(mx+ny)dy=0, \quad an \neq bm,$$

є центром, то це рівняння в повних диференціалах. Показати, що обернене твердження не вірне.

92. Довести, що якщо рівняння попередньої задачі не є рівнянням у повних диференціалах, але має інтегрувальний множник, неперервний в околі початку координат, то особлива точка — фокус (якщо $an \neq bm$).

93*. Дослідити поведінку інтегральних кривих в околі початку координат для таких рівнянь:

а) $y' = \dfrac{xy}{x+y}$; б) $y' = \dfrac{xy}{y-x^2}$;

в) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}$; г) $y' = \dfrac{2xy}{y+x^2}$;

д) $y' = \dfrac{y^2}{y+x^2}$.

94. Нехай у рівнянні

$$y' = \frac{ax+by+p(x,y)}{cx+dy+q(x,y)},$$

де функції p і q неперервно диференційовні в деякому околі точки $(0,0)$, мають місце рівності

$$p(0,0) = p'_x(0,0) = p'_y(0,0) =$$

$$= q(0,0) = q'_x(0,0) = q'_y(0,0) = 0,$$

рівняння не змінюється при заміні x на $-x$ (або y на $-y$), і корені характеристичного рівняння є суто уявними. Довести, що особлива точка $(0,0)$ є центром.

95*. Намалювати розташування інтегральних кривих в околі особливих точок для таких рівнянь:

а) $y' = \dfrac{y(1-x)}{x(x+y-2)}$; б) $y' = \dfrac{1+y-x^2+y^2}{2xy}$;

в) $y' = \dfrac{x^2+y^2-1}{-2xy}$; г) $y' = \dfrac{-\sin x}{\sin y}$.

96*. Дослідити поведінку фазових траєкторій систем:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - 3x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x - 4x^3 \end{cases}$

в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

97. Зобразити лінії рівня енергії рівняння Ньютона для таких потенціалів:

а) $\Pi(x) = \dfrac{kx^2}{2}$; б) $\Pi(x) = x^3 - x$.

98. Рівняння Ньютона з потенціалом

$$\Pi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}, \quad c > 0,\ x > 0,$$

описує зміну відстані планет і комет від Сонця (задача Кеплера). Зобразити лінії рівня енергії для цієї задачі.

99. Дослідити фазові траєкторії системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - x^4. \end{cases}$$

100. У фазовій площині $(x, \dot{x})$ дослідити фазові траєкторії рівняння маятника

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

2.2. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язків, їх обмеженість та періодичність

101. При яких $n \geq 1$ рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y),$$

де $f, f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$, може мати серед своїх розв'язків дві функції: $y_1 = x$ та $y_2 = x^4$?

102. Чи може функція $x(t) = e^{-1/t}$ при $t > 0$, $x(0) = 0$, бути розв'язком диференціального рівняння

$$x^{(2008)} + a(t)x = 0$$

при $t \geq 0$, де $a(t)$ — неперервна функція на $[0, +\infty)$?

103. При яких a кожний розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}, \\ z' = y(1 + z^2)^a \end{cases}$$

продовжується на нескінченний інтервал $(-\infty, +\infty)$?

104. Дано систему у векторному записі

$$y' = f(x, y), \quad f \in C(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Нехай в області $|y| > b$ при всіх x виконується нерівність

$$(y, f(x, y)) \leq k(x)|y|^2,$$

де функція $k(x)$ неперервна. Довести, що розв'язок із будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \leq x < +\infty$.

105. Доведіть, що будь-який розв'язок рівняння $\ddot{x} + e^t x = 0$ обмежений на $\mathbb{R}_+$.

106. Нехай $y \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ задовольняє рівняння

$$y'' + y = -xg(x)y',$$

де функція g невід'ємна та $g \in C(\mathbb{R}_+)$. Довести, що тоді $y(x)$ обмежена на $\mathbb{R}_+$.

107. Нехай $a(t),\ f(t) \in C(\mathbb{R}),\ a \geq 1,\ f > 0,\ \int\limits_0^\infty f(\xi)d\xi = \infty$. Довести, що кожний розв'язок рівняння

$$\ddot{x}(t) + a(t)f(x(t)) = 0$$

обмежений зверху при $t \to +\infty$.

108. Нехай $\dot{x} = f(t,x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),\ f(t,0) \equiv 0$ і відомо, що існує $L > 0$ таке, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$, для яких $\|x - y\| \geq 2$, та для кожного $t \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \ln \|x - y\|$. Чи буде розв'язок $x(t)$ продовжуваним на $[0; +\infty)$?

109. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - y, \\ \dot{y} = x^3 - x^2. \end{cases}$$

Указати всі початкові умови, для яких відповідні розв'язки обмежені.

110. Розглянемо рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = 0$. Нехай p, q, r — додатні періодичні за x функції з періодом T. Скільки T-періодичних за x розв'язків може мати це рівняння?

111. Що можна сказати, якщо в умовах попередньої задачі ми маємо неоднорідне рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = f(x)$?

112. Знайти всі розв'язки $y = y(x)$ рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ такі, що $y(x) \to \pi$ при $x \to +\infty$.

113. Нехай для системи $\dot{x}(t) = f(t, x)$, $f \in C([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$, існують функції $V = V(t, x)$ і $W = W(x)$ такі, що
   1) $V(t, x) \geq W(x)$, $W(x) \to \infty$, $\|x\| \to \infty$;
   2) для кожного розв'язку системи $x = x(t)$ функція $t \mapsto V(t, x(t))$ є незростаючою.

   Довести, що тоді кожен розв'язок системи існує й обмежений на $[0, +\infty)$.

114. Нехай для рівняння $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)f(x) = 0$ з $p, q \in C^{(1)}([0, +\infty))$, $f \in C(\mathbb{R})$, виконані умови:
   1) існує таке $M > 0$, що для всіх $t \geq 0$ має місце нерівність $0 < q(t) \leq M$;
   2) для кожного $t \geq 0$ виконується $p(t) \geq -\dfrac{\dot{q}(t)}{2q(t)}$;
   3) $\int\limits_0^{\pm\infty} f(s)ds = +\infty$.

   Довести, що тоді всі розв'язки рівняння існують і обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

115. Нехай для рівняння $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ з неперервними на $\mathbb{R}$ функціями f, g виконані умови:
   1) для всіх x, y має місце $f(x, y) \geq 0$;
   2) для кожного $x \neq 0$ справедливо $G(x) := \int\limits_0^x g(s)ds > 0$;
   3) $G(x) \to \infty$, $|x| \to \infty$.

Довести, що всі розв'язки рівняння існують і обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

116*. `Теорема Осгуда для систем` (узагальнення теореми Осгуда для рівнянь, див. задачу 54). Нехай функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, в області G задовольняють співвідношення

$$\left| f_i(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n) - f_i(x, \widetilde{\widetilde{y}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{y}}_n) \right| \le \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} |\widetilde{y}_k - \widetilde{\widetilde{y}}_k| \right),$$

де $i = \overline{1, n}$, $\varphi(u)$ — неперервна функція, яка набуває лише додатних значень при додатних u, і крім того,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{c} \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty, \ \varepsilon \to 0 \quad (c > 0).$$

Довести, що тоді існує не більше однієї інтегральної лінії системи

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n},$$

що проходить через будь-яку точку області G.

2.3. Лінійні рівняння та системи

117. Нехай функції $\varphi(\cdot)$ і $\psi(\cdot)$ неперервно диференційовні й лінійно незалежні на $I = (a,b)$, причому $W(x) = W[\varphi,\psi] \equiv 0$ на I. Довести:

а) існують $x_1, x_1' \in I$ такі, що $\varphi(x_1) = \psi(x_1') = 0$;

б) існує інтервал $I_0 \subset I$, на якому функції φ, ψ є лінійно залежними;

в*) існує $\alpha \in I$ таке, що

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \psi(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0.$$

Навести приклад таких функцій.

118. Нехай $f_1, ..., f_n \in C^{(n-1)}(a,b)$ і $W[f_1, ..., f_n] = 0$ на (a,b). Довести, що існує підінтервал $(a_1, b_1) \subset (a,b)$, на якому ці функції є лінійно залежними.

119. Довести, що якщо лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної, то лише за формулою $t = c\int \left(p_n(x)\right)^{\frac{1}{n}} dx$.

120. Відомо, що два частинні розв'язки $u(x)$ і $v(x)$ рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ задовольняють умові $u(x)v(x) \equiv 1$. Знайти рівняння, що пов'язує коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$.

121. Нехай $y(x, y_1, y_2)$ — розв'язок рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

який задовольняє початкову умову $y(0, y_1, y_2) = y_1$, $y'(0, y_1, y_2) = y_2$. Означимо відображення $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ за правилом $\varphi(y_1, y_2) = \Big(y(1, y_1, y_2),\ y'(1, y_1, y_2)\Big)$. Довести, що φ взаємно однозначно відображає паралелограм одиничної площі на паралелограм, площа якого становить $e^{-\int\limits_0^1 p(x)dx}$.

122. Нехай $p, q, f \in C([0, +\infty)$ і для всіх $x \geq 0$ мають місце нерівності $p(x) \leq 0,\ q(x) \leq 0,\ f(x) \geq 0$. Довести, що для кожного розв'язку рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ із початковими умовами $y(0) > 0,\ y'(0) > 0$ для довільного $x \geq 0$ справедливо $y(x) > 0,\ y'(x) > 0$.

123. При яких a і b кожний розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ задовольняє співвідношення $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

124. Для заданого $b > 0$ підібрати таке a, при якому розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ якомога швидше прямує до нуля при $x \to +\infty$.

125*. Нехай y та z розв'язки рівнянь $y'' + q(x)y = 0$ та $z'' + Q(x)z = 0$ з однаковими початковими умовами $y(x_0) = z(x_0),\ y'(x_0) = z'(x_0)$, і на інтервалі (x_0, x_1) маємо $Q(x) > q(x),\ y(x) > 0,\ z(x) > 0$. Довести, що на цьому інтервалі відношення $z(x)/y(x)$ спадає.

126*. Дано рівняння $y'' + ay' + by = f(x)$, причому $|f(x)| \leq m,\ x \in \mathbb{R}$, а корені характеристичного рівняння $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Знайти розв'язок, обмежений при $-\infty < x < \infty$. Показати, що а) всі інші розв'язки наближаються до цього розв'язку при $x \to +\infty$;

б) якщо $f(x)$ періодична, то знайдений розв'язок також періодичний.

127. Нехай на деякому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$ $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння $y'' = f(x)y$, де $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Припустимо, що $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ для всіх $x \in I$. Довести, що існує така додатна константа C, що на I функція $z(x) = C\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ задовольняє рівняння $z'' + \dfrac{1}{z^3} = f(x)z$.

128. Знайти всі розв'язки лінійного однорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 0.$$

129. Нехай $y = y(x)$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 6(6x + 1),$$

причому $y(0) = 1$ та $(y(-1) - 2)(y(1) - 6) = 1$. Знайти такі a, b, $c \in \mathbb{Z}$, що $(y(-2) - a)(y(2) - b) = c$.

130. Знайти всі розв'язки рівняння $y'(x) = ay(x) + by(c - x)$, що існують при $-\infty < x < +\infty$ (a, b і c — сталі).

131. `Задача І. С. Фещенка.` Нехай f — многочлен, причому для довільних x справедлива нерівність

$$f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + a_n f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Довести, що якщо всі корені рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

дійсні, то $f(x) \geq 0$.

132. Нехай $f \in C^{(n)}([0,T])$ і для всіх $x \in [0,T]$ виконуються умови

$$f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n f(x) \geq 0,$$

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

і всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

дійсні. Довести, що для кожного $x \in [0,T]$ справджується нерівність $f(x) \geq 0$.

133*. Заміною незалежної змінної $t = \varphi(x)$ звести рівняння $\dfrac{d^2y}{dx^2} \pm \dfrac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ до вигляду $\dfrac{d^2y}{dt^2} + b(t)\dfrac{dy}{dt} \pm y = 0$, потім позбавитися від першої похідної заміною $y = a(t)u$ [1].

134**. Нехай $|f(t)| \leq \dfrac{c}{t^{1+\alpha}}$ при $t \in [t_0, +\infty)$, де константи $c, \alpha > 0$. Довести, що тоді

1) рівняння $u'' + (1 + f(t))u = 0$ має два такі лінійно незалежні розв'язки, що при $t \to +\infty$

[1] Це перетворення називається перетворенням Ліувілля. У багатьох випадках воно дозволяє звести рівняння $y'' + q(x)y = 0$ до рівняння аналогічного виду, але з "майже сталим" на $(t_0, +\infty)$ коефіцієнтом при y. Це полегшує дослідження асимптотичної поведінки розв'язку при $x \to \infty$.

$$u_1(t) = \cos t + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big), \quad u_2(t) = \sin t + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big);$$

2) рівняння $u'' - (1 - f(t))u = 0$ має два такі лінійно незалежні розв'язки, що при $t \to +\infty$

$$u_1(t) = e^t\Big(1 + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big), \quad u_2(t) = e^{-t}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big).$$

135. Користуючись перетворенням Ліувілля, дослідити асимптотичну поведінку розв'язків рівнянь при $x \to +\infty$:

а) $y'' + x^4 y = 0$; б) $y'' - x^2 y = 0$; в) $y'' + x^2 y = 0$;

г) $y'' + e^{2x} y = 0$; д) $xy'' - y = 0$; е) $y'' - xy = 0$;

є) $xy'' + 2y' + y = 0$; ж) $y'' - 2(x-1)y' + x^2 y = 0$;

з*) $y'' + (x^4 + 1)y = 0$; і*) $(x^2 + 1)y'' - y = 0$;

ї*) $x^2 y'' + y \ln^2 x = 0$.

136*. Довести, що існує єдине значення параметра a, при якому розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - e^t x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = a \end{cases}$$

прямує до нуля при $t \to +\infty$.

137. Розв'язати рівняння

$$(2x^2 - x - 1)y'' - (4x^3 + x - 2)y' + (4x^3 + 2x^2 - 2x + 2)y = 0.$$

138*. `Задача І. С. Фещенка.` Показати, що рівняння

$$y - f(x)y' + \left(\frac{1}{n}\, xf(x) - \frac{x^2}{n(n+1)}\right) y'' = 0,$$

де $n \in \mathbb{N}$, інтегрується у квадратурах.

139. Нехай A — множина чисел $a \in \mathbb{R}$, при яких система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + ay, \\ \dot{y} = ay \end{cases}$$

має розв'язок $(x(t), y(t))$ із властивістю $(x(t), y(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Знайти A і для кожного $a \in A$ вказати множину початкових умов, для яких $(x(t), y(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

140. Нехай $x_1(t)$, $x_2(t)$ — розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (t\cos t + \sin t)x_1, \\ \dot{x}_2 = -(t\cos t + \sin t)x_2. \end{cases}$$

Позначимо

$$\omega(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln\|x(t)\|}{t},$$

де $\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$.

Знайти множину значень функції $\omega(x)$.

141. Нехай $X(t)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$, де матриця $A(t)$ неперервно залежить від t. Довести, що матриця $X(t)$ є ортогональною в будь-який момент часу тоді й тільки тоді, коли матриця $A(t)$ є кососиметричною в будь-який момент часу.

2.4. Коливність розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку

142. Оцінити зверху і знизу відстань між двома сусідніми нулями будь-якого тотожно не рівного нулеві розв'язку таких рівнянь на заданому відрізку:

а) $y'' + 2xy = 0\,, \quad 20 \le x \le 45\,;$

б) $xy'' + y = 0\,, \quad 25 \le x \le 100\,;$

в) $y'' - 2xy' + (x+1)^2 y = 0\,, \quad 4 \le x \le 19\,;$

г) $y'' - 2e^x a y' + e^{2x} y = 0\,, \quad 2 \le x \le 6\,.$

143. Довести, що будь-який розв'язок рівняння $y'' + xy = 0$ на відрізку $-25 \le x \le 25$ має не менше

а) 15 нулів; б*) 21 нуля.

144. Покажіть, що при необмеженому зростанні x послідовні нулі будь-якого ненульового розв'язку рівняння

$$y'' + xy = 0$$

необмежено зближуються.

145. Нехай x_1, x_2, ... — розташовані в порядку зростання послідовні нулі розв'язку рівняння

$$y'' + q(x)y = 0,$$

де $q(x) > 0$; при $x_1 \le x < \infty$ функція $q(x)$ неперервна і зростає. Довести, що

$$x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$$

(тобто відстань між сусідніми нулями спадає).

146. Нехай у рівнянні

$$y'' + q(x)y = 0$$

функція $q(x) > 0$ і x_1, x_2 — послідовні нулі розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння. Нехай також функція $q(x)$ зростає на $[x_1, x_2]$. Довести, що $|y'(x_2)| \geq |y'(x_1)|$.

147. Довести, що якщо в умовах задачі 145 $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = C$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \frac{\pi}{\sqrt{C}}.$$

148. Нехай виконані умови задачі 145 і нехай $b_n = \max\limits_{x_n \leq x \leq x_{n+1}} |y(x)|$. Довести, що $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

149. Нехай у задачі 147 границя C скінченна. Довести, що $b_n \to B > 0$ при $n \to \infty$ (у позначеннях задачі 148).

150*. Нехай $q(t) \in C((0; +\infty) \to \mathbb{R})$. Довести, що коли $\varliminf\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) > 1/4$, то кожен розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

має безліч нулів на $(0; +\infty)$. Якщо ж $\varlimsup\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) < 1/4$, то на півосі $(0; +\infty)$ множина нулів кожного розв'язку рівняння обмежена (теорема Кнезера).

2.5. Крайові задачі

151**. Нехай крайова задача

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

де $q \in C([0;1])$, $q(t) > 0$ на $[0,1]$, має нетривіальний розв'язок. Довести, що

а) $\int\limits_0^1 q(t)dt > 4$;

б) $\max\limits_{x\in[0,1]} q(x) \geq \pi^2$;

в) $\int\limits_0^1 q(t)dt \geq \pi\sqrt{\min\limits_{x\in[0,1]} q(x)}$.

152. Нехай x_1, x_2, a, $b \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $q \in C([x_1, x_2])$, $q(x) \leq 0$, $x \in [x_1, x_2]$. Довести, що існує єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(x_1) = a, \ y(x_2) = b. \end{cases}$$

153. Довести, що в умовах попередньої задачі розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(x_1) = a, \ y(x_2) = 0 \end{cases}$$

монотонний.

154. Функція $f(x) \in C^{(2)}((a;b)) \cap C([a;b])$ задовольняє рівняння $f'' = e^x f$ і умови $f(a) = f(b) = 0$. Знайти $f(x)$.

155. При яких a крайова задача

$$\begin{cases} y'' + ay = 0, \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0 \end{cases}$$

не має розв'язків, крім тривіального?

156*. Дати означення та побудувати функції Гріна для таких крайових задач:

а) $\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi); \end{cases}$

б) $\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(x) \text{ обмежена при } x \to +\infty; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y'' + y' = f(x), \\ y'(0) = 0,\ y(+\infty) = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy'' + y' = f(x), \\ y(1) = 0,\ y(x) \text{ обмежена при } x \to +\infty; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(x) = O(e^{-2x}),\ x \to +\infty; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = f(x), \\ y(1) = 0,\ y(x) \text{ обмежена при } x \to +\infty; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x), \\ y(0) \text{ обмежена }, y(1) = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y'' - y = f(x), \\ y(x) \text{ обмежена при } x \to \pm\infty; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2y'' - 2y = f(x), \\ y(x) \text{ обмежена при } x \to 0 \text{ і при } x \to +\infty. \end{cases}$

157. При яких a існує функція Гріна крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + ay = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

158. Оцінити знизу і зверху розв'язок задачі

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x), \\ y(x) \text{ обмежена при } x \to 0 \text{ та } x \to \infty \end{cases}$$

і його першу похідну, якщо відомо, що $0 \le f(x) \le m$.

159**. Довести, що всі власні значення крайової задачі

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) - \lambda q(x) y(x) = 0,\ x \in (a, b), \\ y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0, \end{cases}$$

де q — гладка додатна функція, є простими, тобто всі власні підпростори є одновимірними.

2.6. Стійкість

160. Нехай для розв'язку $\eta(t)$, $t \in (a, +\infty)$, системи диференціальних рівнянь із неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші, виконується означення стійкості для фіксованого $t_0 \in (a, +\infty)$. Довести, що $\eta(\cdot)$ — стійкий.

161. Довести, що для скалярного рівняння

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad f(t, 0) = 0,$$

із неперервною на $(a, +\infty) \times \mathbb{R}$ правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші з твердження: для довільного $t_0 > a$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожного $x_0 \in B_\delta(0)$ виконується $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$, випливає стійкість нульового розв'язку.

На прикладі системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t} - t^2 x y^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{t}, \quad t \geq 1, \end{cases}$$

показати, що для систем це твердження не має місця.

162. Нехай для скалярного рівняння

$$\dot{x} = f(t, x)$$

із неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші для двох його розв'язків $x = x_1(t)$, $t \geq 0$, і $x = x_2(t)$, $t \geq 0$, існує одна й та сама скінченна границя при $t \to +\infty$. Довести, що будь-який розв'язок $x = x(t)$ цього рівняння з початковим значенням $x(0) \in (x_1(0), x_2(0))$ є стійким.

163. Покажіть, що якщо всі розв'язки системи

$$\dot{x} = f(t, x)$$

із неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші, для яких $\|x(t_0)\| < M$, рівномірно прямують до нуля при $t \to +\infty$, то всі розв'язки, для яких виконана нерівність $\|x(t_0)\| < M$, є стійкими.

164. Нехай функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ліпшицова в околі нуля, $f(0) = 0$, $x = x(t, t_0, x_0)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Довести твердження:

а) якщо нульовий розв'язок стійкий, то він стійкий рівномірно по t_0;

б) якщо нульовий розв'язок асимптотично стійкий, то він асимптотично стійкий рівномірно по x_0 з деякого околу нуля.

165. Визначити область асимптотичної стійкості для систем:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = \beta y - z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y + \beta z, \\ \dot{y} = -\alpha x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = -\beta x - \alpha y - z, \end{cases}$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

166. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, залежної від параметра λ, при $\lambda \leq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z + \lambda \sin x, \\ \dot{y} = z - x + \lambda(\sqrt[3]{1 + 3y} - \cos z), \\ \dot{z} = y - z + \ln(1 + \lambda z). \end{cases}$$

167. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем:

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x} = -x(y^2 + z^2), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x} = y^2 + z^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$$

168. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = cx + dy^5 \end{cases}$$

залежно від значень параметрів a, b, c, d.

169. Знайти положення рівноваги рівняння

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 \sin x = 0$$

і визначити, чи є вони стійкими.

170. Знайти положення рівноваги рівняння

$$\ddot{x} + x^l \sin x = 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

та дослідити їх на стійкість.

171. Довести, що коли в системі рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases}$$

функція f така, що $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, то положення рівноваги цієї системи стійке.

172. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем:

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y - x^3; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

173. Довести стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$$

де $\operatorname{sign} f_i(z) = \operatorname{sign} z$, $i = \overline{1,4}$.

174. Нехай положення рівноваги систем $\dot{x} = Ax$ та $\dot{y} = By$, де A, B — сталі матриці, стійке за Ляпуновим. Чи можна стверджувати те саме відносно системи $\dot{z} = (A + B)z$?

175*. Довести, що якщо $y \equiv 0$ є асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

то тоді $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$, $k = \overline{0, n-3}$.

176. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A — стала $n \times n$-матриця. Довести, що зі стійкості системи

$$\dot{x} = Ax$$

випливає стійкість системи

$$\dot{y} = [A + B(t)]y$$

при $B(t) \in C([t_0; +\infty))$ і $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau < \infty$.

177*. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A — стала $n \times n$-матриця. Довести, що з асимптотичної стійкості системи

$$\dot{x} = Ax$$

випливає асимптотична стійкість системи

$$\dot{y} = [A + B(t)]y$$

при $B(t) \in C([t_0; +\infty))$ і $B(t) \to 0,\ t \to \infty$.

178. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A — стала $n \times n$-матриця, система

$$\dot{x} = Ax$$

— асимптотично стійка, а система

$$\dot{y} = (A + B(t))y + f(t)$$

така, що $B(\cdot), f(\cdot) \in C([t_0, +\infty))$ і виконується одна з двох умов:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad f(t) \to 0,\ t \to \infty;$$

$$B(t) \to 0,\ t \to \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|f(t)\| dt < \infty.$$

Довести, що тоді всі розв'язки $y(t)$ мають границю $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

179. Довести, що система з поліноміальними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + ... + A_m)x,$$

де A_k $(k = 0, 1, ..., m)$ — сталі $n \times n$-матриці, є асимптотично стійкою, якщо всі корені рівняння

$$\det(A_0 - \lambda E) = 0$$

мають від'ємні дійсні частини.

180. Указати достатні умови асимптотичної стійкості системи

$$\begin{cases} \dot{x} = (a + \alpha t)x + (b + \beta t)y, \\ \dot{y} = (c + \gamma t)x + (d + \delta t)y. \end{cases}$$

181. Довести, що якщо $a > 0$ і $\int\limits_0^\infty |b(t)|dt < \infty$, то всі розв'язки рівняння

$$\ddot{x} + (a + b(t))x = 0$$

обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

182. Нехай система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

стійка. Довести стійкість нульового розв'язку системи

$$\dot{x} = Ax + f(t, x)$$

у випадку, коли $f(t, x) \in C([0; +\infty) \times B_r^n(0) \to \mathbb{R}^n)$, $\|f(t, x)\| \le g(t)\|x\|$, $\int\limits_0^\infty g(t)dt < \infty$.

183*. Довести, що для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty)),$$

при $t_0 \le t \le \infty$ справедливі нерівності:

$$\|x(t_0)\|e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\|ds} \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\|e^{\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\|ds}.$$

Якщо, крім того, $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|A(s)\|ds < \infty$, то для кожного розв'язку $x(t)$ існує $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$.

184. Довести, що якщо $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|A(s) + A^T(s)\| ds < \infty$, то всі розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty)),$$

є обмеженими на $[t_0, +\infty)$.

185. Нехай $A(t)$ — неперервна симетрична матриця, $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ — найменше та найбільше її власні числа. Показати, що $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ неперервні.

186. Довести `нерівність Важевського`: для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty)),$$

при $t_0 \leq t \leq \infty$ справедлива нерівність

$$\|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s) ds} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(s) ds},$$

де $\|x(t)\|$ — норма вектора $x(t)$, $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ — найменше та найбільше власні числа симетричної матриці $A^H(t) = \dfrac{1}{2}\,(A(t) + A^T(t))$.

187. Довести, що для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty)),$$

при $t_0 \leq t \leq \infty$ справедлива нерівність

$$\|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} r(s) ds} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} R(s) ds},$$

де

$$r(t) = \min_{1 \le i \le n} \Big(a_{ii}(t) - \sum_{j \ne i} \frac{|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|}{2} \Big);$$

$$R(t) = \max_{1 \le i \le n} \Big(a_{ii}(t) + \sum_{j \ne i} \frac{|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|}{2} \Big).$$

188. Дослідити на стійкість систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \sin^2 t + (a + 2b/t) y, \\ \dot{y} = -ax - y \cos^2 t, \end{cases}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

189. Нехай для системи

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0,$$

існує функція $V \in C^{(1)}(\|x\| < r)$ така, що для її похідної в силу системи справедлива рівність

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + W(x),$$

де $\alpha > 0$, W — знакостала і для будь-якого $\delta > 0$ існує точка x_0, $\|x_0\| < \delta$, така, що $V(x_0) W(x_0) > 0$. Довести, що тоді тривіальний розв’язок системи є нестійким.

190. Довести, що періодичний, відмінний від константи, розв’язок автономної системи диференціальних рівнянь не може бути асимптотично стійким.

191. Побудувати приклад системи

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

лише з одним стійким розв’язком, для якої розв’язок із будь-якою початковою умовою існує, єдиний і обмежений для всіх x.

2.7. Різні задачі

192. Нехай диференціальне рівняння
$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$
має розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, визначені на $\mathbb{R}$ і такі, що $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Нехай $f(x) = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$. Знайти константи A і B такі, щоб $f(x)$ була розв'язком диференціального рівняння
$$y' + Ap(x)y = Br(x).$$

193. Нехай $f \in C^{(2)}([0, +\infty))$ і
$$|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2+1)f(x)| \le 1,\ x \ge 0.$$
Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

194. Довести, що рівняння
$$y'' + (xe^{-x} + 1)y' + e^{-x}y = 0,$$
$$y'' + e^x y' + xy = 1$$
не мають спільних розв'язків.

195. Чи може функція $x^2 \sin x$ на інтервалі $(-a, a)$ бути розв'язком рівняння
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
із коефіцієнтами, неперервними на цьому інтервалі?

196. Знайти всі розв'язки систем диференціальних рівнянь

а) $\begin{cases} \ddot{y} + \dfrac{\dot{y}^2}{y} = \dot{x} + \dfrac{x\dot{y}}{y}, \\ \dot{x}y + x\dot{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{2}{y}\ \dot{x}\ \dot{y} = 0, \\ \dot{y} + \dfrac{1}{y}\ (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) = 0. \end{cases}$

197. При яких n існує рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

у якого $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ і будь-який його розв'язок $y(x)$, визначений на інтервалі I, задовольняє нерівність

$$y\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2}$$

при всіх $x_1, x_2 \in I$.

198. Чи існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що має неперервні частинні похідні першого порядку, але не має жодної частинної похідної другого порядку?

199. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, причому в довільній точці $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функція f має частинні похідні всіх порядків. Чи вірно, що f неперервна на $\mathbb{R}^2$?

200. Знайти похідні від повних еліптичних інтегралів:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi \quad (0 < k < 1),$$

виразити їх через $E(k)$ і $F(k)$, довести формули:

а) $\int\limits_0^k F(s) s ds = E(k) - (1 - k^2) F(k)$;

б) $\displaystyle\int_0^k E(s) s ds = \frac{1}{3}\left[(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)\right].$

Показати, що функція $E(k)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$E''(k) + \frac{1}{k}\, E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

201. Довести, що функція Бесселя цілого індексу n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

задовольняє рівняння Бесселя

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

202. Довести, що многочлен Ерміта

$$H_m(t) = (-1)^m e^{t^2}\frac{d^m e^{-t^2}}{dt^m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

є розв'язком рівняння

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2mx = 0.$$

203. Довести, що многочлен Лежандра

$$P_m(t) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m(t^2-1)^m}{dt^m}$$

є розв'язком рівняння

$$(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + m(m+1)x = 0.$$

204. Довести, що многочлен Чебишова

$$T_m(t) = \cos\left(m \cdot \arccos\ t\right)$$

є розв'язком рівняння

$$(1-t^2)\ddot{x} - t\dot{x} + m^2 x = 0.$$

205**. Знайти всі послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n$ дійсних чисел таких, що $a_0 \neq 0$, і за умови, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n разів диференційовна і $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ при $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то існує точка $\xi \in (x_0, x_n)$ така, що $a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \ldots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0$.

206**. Навести приклад того, що теорема Пікара не має місця для нескінченної (зліченної) системи диференціальних рівнянь. Запропонувати якісь достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нескінченної системи диференціальних рівнянь із нескінченною кількістю шуканих функцій

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ...), \quad i = 1, 2, ...$$

207. Нехай $f = f(x, y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ і $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, де $f(z) := f(x, y)$, коли $z = x + iy$. Довести, що для кожного $T > 0$ знайдеться розв'язок рівняння

$$\frac{dz}{dt} = izf(z),$$

що є періодичним із періодом T.

208. Для довільних $n \times n$-матриць A і B довести нерівність

$$\left\| e^{A+B} - e^A \right\| \le \|B\| e^{\|A\|} e^{\|B\|}.$$

209. Для довільних $n \times n$-матриць A і B довести рівність

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} \big[A, [A, B]\big] + \dots,$$

де $[A, B] = AB - BA$.

210. Для неперервно диференційовної матриці $X(t)$ довести, що матриця $e^{X(t)}$ також неперервно диференційовна і справедлива формула

$$\frac{d}{dt}\ e^{X(t)} = \int\limits_0^1 e^{(1-\alpha)X(t)}\ \frac{dX(t)}{dt}\ e^{\alpha X(t)} d\alpha.$$

211. Нехай $J(\lambda)$ — клітина Жордана розмірності $n \times n$ із власним значенням λ і $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ — неперервна T-періодична вектор-функція. Довести, що система

$$\dot{y} = J(\lambda) y + e^{\lambda t} f(t)$$

має розв'язок виду $y = e^{\lambda t}\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — T-періодична вектор-функція тоді й лише тоді, коли $\int\limits_0^T f_n(t)dt = 0$.

212. Нехай $A(t)$ — неперервна на $[0,+\infty)$ $n \times n$-матриця, $B \subset \mathbb{R}^n$ — множина початкових значень x_0 таких, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

обмежений на $[0,+\infty)$. Довести, що B є підпростором і якщо для кожної $f \in C([0,+\infty))$ система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

має обмежений розв'язок, то для довільної $f \in C([0,+\infty))$ існує єдиний розв'язок системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

такий, що $x(0) \in B^{\perp}$ і $x(t)$ обмежений на $[0,+\infty)$.

213. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy, \\ \dot{y} = x^4 - x^3 y \end{cases}$$

не має періодичних розв'язків, відмінних від сталих.

214. Чи може n-вимірна система

$$\dot{x}(t) = f(t,x),$$

із періодичною правою частиною $f(t+T,x) \equiv f(t,x)$, мати нетривіальний періодичний розв'язок із періодом τ, раціонально несумірним з T (тобто $\dfrac{T}{\tau}$ — ірраціональне)?

215. Дослідити існування граничного циклу та зобразити поведінку фазових траєкторій:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$

216. На фазовій площині $(x, \dot{x})$ дослідити поведінку траєкторій рівняння Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

217. Дослідити існування граничного циклу та зобразити поведінку фазових траєкторій системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + x^3, \\ \dot{y} = -x - y + y^3. \end{cases}$$

218. Нехай $\Gamma_+(x_0) = \bigcup\limits_{t \geq 0} x(t, x_0)$ — обмежена півтраєкторія системи

$$\dot{x} = f(x),$$

в якій $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, $\omega(x_0)$ — її ω-гранична множина. Довести, що $\omega(x_0) \neq \emptyset$, компактна, зв'язна, інваріантна та

$$\lim_{t \to \infty} \rho\big(x(t, x_0), \omega(x_0)\big) = 0.$$

Відповіді та вказівки

1. Дослідити $y(t)$ на монотонність та опуклість.

2. Використати метод ізоклін.

3. Відповідь: $f(x,y)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+f\dfrac{\partial f}{\partial y}=0.$

4. Скористатися властивостями інтеграла зі змінною верхньою межею.

5, 6. Відокремити змінні та проаналізувати невласні інтеграли.

7. Довести, що $f(c)=0$.

8. Скористатися можливістю "склеювати" розв'язки.

9. Виконати заміну незалежної змінної.

10. Перейти до полярних координат та довести періодичність функції $r=r(\varphi)$.

11. Відповідь: $p=q(p+1)$.

12. Відповідь: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{f(k)-k}{1+kf(k)}$.

13. Скористатися твердженням попередньої задачі.

14. Відокремити змінні та проінтегрувати рівняння.

15. Звести задачу до аналізу невласного інтеграла $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{ds}{as^{\frac{1}{3}}+f(s)}$.

16. Довести, що якщо для розв'язку $y = y(x)$ виконується $y(x_1) = y(x_2)$, то функція $y(x)$ є сталою на $[x_1, x_2]$.

17. Скористатися твердженням попередньої задачі.

18. Скористатися можливістю "склеїти" розв'язки.

    Відповідь: так.

19. Як множину нулів функції f взяти канторову множину.

20. Скористатися твердженням попередньої задачі.

21 – 28. Проаналізувати формулу загального розв'язку для лінійного рівняння.

29. Знайти обмежений розв'язок.

    Відповідь: $y(x) = \int\limits_0^\infty e^{-s-\sin s \cos(s+2x)} \sin(x+s)ds$.

30. Скористатися правилом Лопіталя для виразу $\dfrac{f \cdot g^A}{g^{A+1}}$.

    Відповідь: $\dfrac{B}{A+1}$.

31. Упровадити заміну $y = xu$.

32. Проаналізувати диференціальне рівняння для $y_1(x) - y_2(x)$.

33. Скористатися тим, що заміна $u = \dfrac{1}{y - y_i}$ зводить рівняння Ріккаті до лінійного неоднорідного рівняння.

34. Міркуючи від супротивного, проаналізувати різницю двох розв'язків.

35. Скористатися розв'язками задач Коші

$$\begin{cases} y' = (y - M)^2, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} y' = (y - m)^2, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

36. При $x > x_0$ скористатися інтегральним рівнянням, при $x < x_0$ проаналізувати інтеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{ds}{(s-m)^2}$.

37. Розглянути функцію $g(t) = te^{1-t}$, $t \geq 0$.

38. Довести, що послідовні наближення $\{y_{2m}(x)\}$ і $\{y_{2m-1}(x)\}$ для $x \neq 0$ мають різні граничні точки.

39. Скористатися теоремою про порівняння та проаналізувати розв'язки.

40. Домножити диференціальне рівняння на y і оцінити $|y|$.

41. Скористатися оцінкою $x^2 + y^2 < y^2 + \varepsilon^2$ при $|x| < \varepsilon$ і теоремою порівняння.

    Відповідь: а) так; б) ні.

42. Проаналізувати поле напрямків.

43. Скористатися тим, що $y_k = x + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — розв'язки цього рівняння.

44. Застосувати теорему про продовження.

    Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

45. Оцінити праву частину і застосувати теорему про продовження.

46. Скористатися доведенням теореми про порівняння.

47. Відповідь: а) $a \in (0,1]$; б) $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; в) $(1, +\infty)$.

48. Подати розв'язок рівняння у вигляді $y(x) = k_0 x + x\delta(x)$, де $\delta(x) \to 0$, $x \to 0$.

49. Розглянути різницю $y(x) - z(x)$, де $z(x)$ — розв'язок задачі Коші $\begin{cases} z' = k(x)z, \\ z(x_0) = y_0. \end{cases}$

50. Скористатися тим що, якщо $x = x(t)$ — розв'язок рівняння, то $x(t+T)$ також буде розв'язком.

51. Міркуючи від супротивного, розглянути найближчу до x_0 точку, в якій порушується єдиність.

52. Скориставшись теоремою про продовження та теоремою Брауера про нерухому точку, проаналізувати відображення $y_0 \mapsto y(T)$.

53. Для неліпшицової функції f побудувати апроксимуючу послідовність, кожен елемент якої задовольняє умови задачі 47.

54. Скористатися методом від супротивного (див. [13, глава 3, § 12]).

55. Розглянути верхню та нижню границю $x(t)$ при $t \to \infty$ і довести їх рівність.

56. Скористатися попередньою задачею, зваживши на те, що $z(t)$ задовольняє рівняння $z' = f(t)z - z^2$.

57. Скористатися теоремою про порівняння ($x - y^2 < x + 1$ і $y(x) > 0$ для всіх x) і задачею 46.

58. Розглянути диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$.

59. Див. [20, глава 2, § 5].

60, 61. Використати формулу Тейлора.

62. Відповідь: $k < 1$.

63. Відповідь: так.

64. Розглянути диференціальне рівняння відносно функції $v(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds$.

65. Проаналізувати рівняння $\varphi(t) = \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \chi(s)\varphi(s)ds$.

66. Розглянути функцію $w(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Phi(u(s))ds$.

67. Скористатися лемою Біхарі.

68. Розглянути $\rho(x) = z(x) - y(x)$ і скористатися методом від супротивного.

69. Дослідити властивості додатної функції $w(t) = \sqrt{\sup\limits_{s\in[0,\ t]} a(s)} + \int\limits_{0}^{t} b(s)ds$.

70. Відповідь: $\mu = e^{-\int a(x)dx}$.

71. Скористатися формулою диференціювання складної функції.

72. Записати умову інтегрувального множника.

73. Скористатися теоремою про характеризацію рівняння в повних диференціалах.

74, 75. Записати умову інтегрувального множника.

76. Продиференціювати обидві частини по x.

77. Проаналізувати формулу загального розв'язку.

Відповідь: 2.

78. Міркуючи від супротивного, проаналізувати різниці $y_1 - y_2$, $y_1 - y_3$, $y_4 - y_2$, $y_4 - y_3$.

79. Скористатися методом від супротивного і розглянути різницю двох неперервних T-періодичних розв'язків.

Відповідь: ні.

80. Скористатися методом від супротивного.

Відповідь: ні.

81. Розглянути послідовність $x_k = \varphi(kT)$ і довести її монотонність.

82. Скористатися результатом задачі 46 і періодичністю f.

83. Розглянути рівняння для допоміжних функцій $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ та $\psi(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

84. Скористатися тим, що пряма $y = 0$ складається з точок неєдиності задачі Коші.

85. Скористатися тим, що формула $x(t) = \varphi(t + C)$, $C \in \mathbb{R}$, дає всі розв'язки рівняння.

86. Скористатися твердженням попередньої задачі.

87. Розглянути ортонормовану систему $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t, \ldots\right.$ $\left.\ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt, \ldots\right\}$ на $[0, \pi]$. Показати, що $f(x)$ можна як завгодно точно наблизити лінійними комбінаціями із цієї системи. Записати рівність Парсеваля.

88. Скористатися методом від супротивного і довести спочатку, що кількість спільних точок скінченна.

89. Розглянути $\alpha = \min\limits_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \max\limits_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$. Цих значень функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ досягає в деяких точках. Далі розглянути деяку лінійну комбінацію даних в умовах рівностей.

90. Розглянути рівняння $y'(x) = 1 - 2\operatorname{sign} y(x)$.

91. З умови, що початок координат є центром, вивести рівність $b = m$.

92. Показати, що корені характеристичного рівняння є парою комплексно-спряжених чисел із ненульовою дійсною частиною.

93. На площині Oxy визначити області знакосталості y', y'', а також криві, на яких ці похідні рівні нулю або необмежені. На основі цього з'ясувати, із якого

боку інтегральні криві підходять до особливої точки (див. [2, глава 6, § 3]).

94. Скористатись тим, що фазові траєкторії системи мають вісь симетрії.

95. Скористатись теоремою Гробмана — Хартмана та твердженням попередньої задачі.

96. З'ясувати поведінку фазових траєкторій в околі положень рівноваги, використавши твердження задачі 93. За допомогою 1-го інтеграла побудувати фазові криві в усій площині.

97. Скористатись вказівкою [16, глава 5, § 5.5].

98. Побудувати графік функції $\Pi(x)$ та скористатись вказівкою до попередньої задачі.

99. Скористатись тим, що ця система є системою Ньютона.

100. Це рівняння є рівнянням Ньютона, його детальний аналіз міститься в [16, глава 5, § 5.5].

101. Скористатись теоремою про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

    Відповідь: $n \geq 5$.

102. Проаналізувати $x^{(n)}(t)$, де $x(t) = e^{-1/t}$.

    Відповідь: ні.

103. Оцінити праву частину та скористатись теоремою про продовження.

Відповідь: $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

104. Виходячи з умови, оцінити $\|y\|$.

105. Домножити на $\dot{x}$ та проінтегрувати частинами.

106. Домножити на y' та проінтегрувати від 0 до x.

107. Домножити на $\dot{x}$ та проінтегрувати від 0 до t. Оцінити отримані інтеграли.

108. Оцінити $\|x(t)\|$.

Відповідь: так.

109. Звести задачу до диференціального рівняння.

110. Застосувати метод від супротивного та формулу інтегрування частинами.

Відповідь: жодного, крім тотожного нуля.

111. Скористатися твердженням попередньої задачі.

Відповідь: не більше одного.

112. Домножити на y' та отримати $(y')^2 = 2\cos y + C$. Довести, що $C = 2$.

113. Оцінити $\|x(t)\|$.

114. Звести до системи, розглянути $V(t,x,y) = \int\limits_0^x f(s)ds + \frac{y^2}{2q(t)}$ і скористатись твердженням задачі 113.

115. Звести до системи, розглянути $V(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2} + G(x)}$ і використати твердження задачі 113.

116. Скористатися методом від супротивного (див. [13, § 29]).

117. Використати:

а) метод від супротивного.

б) метод від супротивного і результат пункту а).

в) пункт б) і вибрати максимальний із таких інтервалів.

118. Див. пункт б) задачі 117.

119. Упровадити заміну $t = \psi(x)$.

120. Продиференціювати кілька разів рівність $u(x)v(x) \equiv 1$.

Відповідь: $q' + 2pq = 0$.

121. Скористатися формулою Остроградського — Ліувілля.

122. Домножити на $y'(x)$.

123. Скористатися виглядом фундаментальної системи розв'язків і записати формулу загального розв'язку рівняння.

Відповідь: $a > 2,\ b > a - 1$.

124. Див. вказівку до задачі 123.

Відповідь: $a = 2\sqrt{b}$.

125. Розглянути $h(x) = \dfrac{z(x)}{y(x)}$ і показати, що $h' < 0$ на (x_0, x_1).

126. Скористатися методом варіації довільної сталої. Шуканий розв'язок записати у вигляді невласного інтеграла.

127. Зробити пряму підстановку та скористатись формулою Остроградського — Ліувілля.

128. Шукати розв'язок у вигляді многочлена. Інший розв'язок знайти за формулою Абеля.

129. Скористатися твердженням попередньої задачі.

130. Довести, що $y''(x) = (a^2-b^2)y(x)$. Далі розглянути можливі варіанти знака $a^2 - b^2$.

131. Розглянути оператор $i_\lambda = f(x)+\lambda f'(x)$ та з'ясувати, що є композицією n таких операторів.

132. Розглянути оператор $I_\lambda = f' + \lambda f$.

133. Скористатися вказівкою в умові задачі.

134. Див. [18, глава 6, § 2].

135, 136. Скористатися перетворенням Ліувілля (задача 133).

137. Упровадити заміну $y(x) = e^x z(x)$.

138. Побудувати алгоритм знаходження розв'язку за скінченну кількість кроків — аналогічно до того, що існує для спеціального рівняння Ріккаті в інтегровному випадку.

139. Проаналізувати загальний розв'язок системи.

140. Див. вказівку до задачі 139.

Відповідь: $\omega(x) = 0$ або $\omega(x) = -1$.

141. Скористатися тим, що з ортогональності фундаментальної матриці системи випливає таке: довжина векторів, які входять до фундаментальної системи розв'язків не змінюється із часом.

142. Скористатися теоремою про оцінювання відстані між послідовними нулями довільного коливного розв'язку.

143. Розбиваючи відрізок $[0, 25]$ на менші відрізки, на кожному з них використати теорему порівняння.

144. Скористатися теоремою про оцінювання відстані між двома послідовними нулями довільного коливного розв'язку.

145. Скористатися теоремою порівняння.

146. Скористатися твердженням задачі 125.

147 – 150. Скористатися теоремою порівняння.

151. Див. [20, глава 11, § 5].

152. Сконструювати розв'язок із двох розв'язків допоміжних задач Коші та скористатися теоремою про неколивність.

153. Скористатися твердженням задачі 152.

154. Скористатися теоремою про неколивність.

Відповідь: $f(x) \equiv 0$ — єдиний розв'язок.

155. Відповідь: $a \neq \pi^2 n^2$.

156. Формально побудувати функцію Гріна та безпосередньо обґрунтувати її коректність.

Відповідь:

а) $G = 1/2 \sin|x - s|$;

б) $G = -x \ (0 \le x \le s)$, $G = -s \ (s \le x)$;

в) $G = -1 \ (0 \le x \le s)$, $G = -e^{s-x} \ (s \le x < \infty)$;

г) $G = -\ln x \ (1 \le x \le s)$, $G = -\ln s \ (s \le x < \infty)$;

д) $G = 1/2e^{s}(e^{-3x} - e^{-x}) \ (0 \le x \le s)$,

$G = 1/2e^{-3x}(e^{s} - e^{3s}) \ (s \le x < \infty)$;

є) $G = (1 - x^2)/2s^2x \ (1 \le x \le s)$,

$G = (1 - s^2)/2s^2x \ (s \le x < \infty)$;

е) $G = x(s^3 - 1)/3s^2 \ (0 \le x \le s)$,

$G = s(x^3 - 1)/3x^2 \ (s \le x \le 1)$;

ж) $G = -(1/2)e^{-|x-s|}$;

з) $G = -x^2/3s^3 \ (0 \le x \le s)$,

$G = -1/3x \ (s \le x < \infty)$.

157. Скористатися теоремою про існування розв'язку крайової задачі і твердженням задачі 155.

Відповідь: $a \ne \pi^2 n^2$.

158. Записати розв'язок за допомогою функції Гріна.

159. Застосувати теорему Ролля.

160. Скористатися властивістю інтегральної неперервністі.

161. Скористатись єдиністю розв'язку задачі Коші та одновимірністю рівняння.

162. Скористатися вказівкою до задачі 161.

163. Скористатись означенням стійкості та властивістю інтегральної неперервністі.

164. Скористатись автономністю системи.

165. Скористатися критерієм Рауса – Гурвіца.

166. Скористатися теоремою про стійкість за першим наближенням.

167. Використати перший інтеграл.

Відповідь: 1) стійкий; 2) нестійкий.

168. При $bc < 0$ скористатися теоремою про стійкість за першим наближенням, при $bc > 0$ застосувати метод функцій Ляпунова.

169 , 170. Перейти до системи та застосувати теореми Ляпунова.

171 – 173. Побудувати функцію Ляпунова.

174. Відповідь: ні.

175. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $a_n = 1$. Індукцією за кількістю лінійних або квадратичних множників, на які розкладається многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, довести твердження задачі.

176. Розглянути $B(t)y$ як вільний член лінійної неоднорідної системи, застосувати метод варіації довільної сталої та за допомогою нерівності Гронуолла — Беллмана оцінити норму розв'язку $\|y\|$.

177. Скориставшись тим, що $\max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, оцінити $\|e^{At}\|$ і оцінити $\|y\|$ за допомогою нерівності Гронуолла — Беллмана.

178. Оцінити $\|y\|$ за допомогою міркувань задачі 177.

179. Виконати заміну незалежної змінної $\tau = \dfrac{t^{m+1}}{m+1}$ і скористатися твердженням задачі 177.

180. Скористатися твердженням задачі 179.

181. Шляхом розширення фазового простору перейти до системи другого порядку. Далі скористатися твердженням задачі 176.

182. Розглянути $f(t,x)$ як вільний член лінійної неоднорідної системи та скористатися твердженням задачі 176.

183. Скористатися нерівністю Гронуолла — Беллмана. Для доведення другого твердження див. [4, глава 3, § 10].

184. Оцінити $\dfrac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) = x^T\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dx^T}{dt}\,x$ за допомогою нерівності Гронуолла – Беллмана.

185. Скористатися тим, що

$$\Lambda(t) = \max_{x\in S^{n-1}} \frac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)x;$$

$$\lambda(t) = \min_{x\in S^{n-1}} \frac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)x,$$

де S^{n-1} — $(n-1)$-вимірна одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

186. Вивести нерівність $\lambda(t)\|x\|^2 \le x^T A^H(t)x \le \Lambda(t)\|x\|^2$ та оцінити $\dfrac{d}{dt}\|x(t)\|^2$.

187, 188. Скористатися твердженням задачі 186.

189. Скористатися теоремою про нестійкість.

190. Скористатися тим, що якщо $\eta(\cdot)$ — розв'язок автономної системи, то при будь-якому $\delta > 0$ функція $y_\delta(t) = \eta(t + \delta)$ також є розв'язком цієї системи.

191. Розглянути ситуацію стійкого центра, охопленого замкненими фазовими траєкторіями із різними періодами.

192. Продиференціювати декілька разів рівність, що задає функцію $f(x)$.

193. Скористатися правилом Лопіталя.

194. Міркуючи від супротивного, проаналізувати поведінку спільного розв'язку в точці нуль.

195. Міркуючи від супротивного, підставити в рівняння і проаналізувати поведінку відповідних виразів при $x \to 0$.

Відповідь: ні.

196. Проінтегрувати, звівши до рівняння.

197. Звернути увагу на те, що ця умова рівносильна умові опуклості вниз функції $y(x)$.

Відповідь: $n = 1$ або $n = 2$.

198. Відповідь: так, наприклад, $f(x, y) = \int\limits_0^{x+y} h(t)dt$, де h — неперервна ніде не диференційовна функція.

199. Відповідь: ні, наприклад,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

200, 201. Скористатись теоремою про диференціювання інтеграла за параметром.

202. Для функції $u = e^{-t^2}$ скористатись рівностями

$$u^{(n+2)} = -2tu^{(n+1)} - 2(n+1)u^{(n)}, \ u^{(n)} = (-1)^n e^{-t^2} H_n(t).$$

203. Знайти явний вигляд многочлена Лежандра і зробити пряму підстановку.

204. Продиференціювати кілька разів рівність $T_m(\cos t) = \cos mt$.

205. Скористатися вказівкою до задачі 132.

Відповідь: усі такі послідовності $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, для яких корені рівняння $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ дійсні.

206. Розглянути задачу Коші для нескінченної системи $\dot{x}_n = x_n^2, \ x_n(0) = -1/n, \ n \geq 1$.

207. Перейти до полярних координат та проаналізувати інтеграл одержаного рівняння для полярного кута.

208. Скористатись означенням матричної експоненти.

209. Одержати формулу для $\underbrace{[A, \ldots, [A,}_{k} B], \ldots], \ k \geq 1$.

210. Скористатися твердженням попередньої задачі.

211. Здійснити підстановку та записати умову періодичності функції φ.

212. Скористатися тим, що простір початкових даних є прямою сумою B і $B^{\perp}$.

213. Міркуючи від супротивного, за допомогою першого інтеграла дійти протиріччя.

214. Розглянути систему з правою частиною, що не залежить від часу в точках τ-періодичного розв'язку.

     Відповідь: так.

215. Перейти до полярних координат та дослідити функцію $r = r(\varphi)$.

216. Перейти до системи та скористатись достатньою умовою існування граничного циклу в термінах додатних коренів спеціального рівняння (див. [16, глава 5, § 5]).

217. Скористатися достатньою умовою існування граничного циклу — принципом кільця (див. [16, глава 5, § 5]).

218. Скористатися півгруповими властивостями відображення $t \mapsto x(t, x_0)$.

Список літератури

1. *Арнольд, В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. — М. : Наука, 1975. — 239 с.

2. *Боярчук, А. К.* Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. — М. : Эдиториал УРСС, 2001. — 384 с.

3. *Гудименко, Ф. С.* Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. — К. : Вища шк. , 1972. — 154 с.

4. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демиждович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

5. Диференціальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. — К. : Вища шк. , 1981. — 503 с.

6. *Егоров, А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. — М. : Физматлит, 2003. — 384 с.

7. *Еругин, Н. П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, Т. С. Бондаренко. — М. : Наука, 1974. — 326 с.

8. *Краснов, М. П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М. П. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М. : УРСС, 2002. — 256 с.

9. *Кривошея, С. А.* Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К. : Либідь, 2004. — 407 с.

10. *Коддингтон, Э.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Коддингтон, Н. Левинсон. — М. : Иностранная литература, 1958. — 474 с.

11. *Матвеев, Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. — М. : Высш. шк. , 1963. — 546 с.

12. *Перестюк, М. О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. — К. : ТВіМС, 2004. — 224 с.

13. *Петровский, И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Московский ун-т, 1984. — 295 с.

14. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1982. — 331 с.

15. *Садовничий, В. А.* Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. А. Григорьян, С. В. Конягин. — М. : Издательство МГУ, 1987. — 311 с.

16. *Самойленко, А. М.* Диференціальні рівняння в задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. — К. : Либідь, 2003. — 504 с.

17. *Самойленко, А. М.* Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. — К. : Либідь, 2003. — 600 с.

18. *Степанов, В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов — М. : ГИФМЛ, 1958. — 462 с.

19. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1979. — 128 с.

20. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

Навчальне видання

КАПУСТЯН Олексій Володимирович
КАСЬЯНОВ Павло Олегович
ПОЗУР Сергій Володимирович
СУКРЕТНА Анна Василівна
ФЕЩЕНКО Іван Сергійович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З КУРСУ "Диференціальні рівняння"

Навчальний посібник

Редактор *Л. В. Магда*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 17.10.10. Формат 60x84$^{1/16}$. Вид. № 192. Гарнітура Computer Modern.
Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 300. Ум. друк. арк. 4,65 . Обл.-вид. арк. 5. Зам. № 210-5392.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; факс (38044) 239 31 28
Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02