

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

механіко-математичний факультет

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

*Укладач(и): професор Перестюк М.О., професор Парасюк І.О.,
професор Капустян О.В.*

Диференціальні рівняння

назва дисципліни

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

для студентів спеціальності:

“механіка”

шифр і назва напрямку (спеціальності)

Затверджено

на засіданні кафедри

Протокол № 8

від „10” квітня 2012 р.

Зав. кафедри

М.О.Перестюк

Підпис Прізвище, ініціали

Декан факультету/ Директор
інституту

М.Ф. Городній

Прізвище, ініціали

КИЇВ – 2012

Робоча навчальна програма з дисципліни
"Диференціальні рівняння"

Назва навчальної дисципліни

Укладач(і): доктор фіз.-мат. наук, професор Перестюк М.О.,
доктор фіз.-мат. наук, професор Парасюк І.О.,
доктор фіз.-мат. наук, професор Капустян О.М.

Лектор(и): доктор фіз.-мат. наук, професор Перестюк М.О.

Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали

Викладач(і): канд. фіз.-мат. наук Сукретна А.В.

*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів),
який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття*

Погоджено
з науково-методичною комісією
«18» квітня 2012 р.

Підпис голови НМК факультету/ інституту

Передмова

Диференціальні рівняння є базовою математичною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Вона викладається на **II курсі у 3-му та 4-му семестрах** в обсязі **324 години (9 кредитів)**, з них **лекцій 85 год.** (34 год. у 3-му та 51 год. у 4-му семестрах), **практичних занять 68 год.** (34 год. у 3-му та 34 год. у 4-му семестрах), **самостійна робота 171 год.** (76 год. у 3-му та 95 год. у 4-му семестрах). Формами підсумкового контролю є **залік** у 3-му семестрі та **іспит** у 4-му семестрі.

Мета і завдання навчальної дисципліни:

Ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії диференціальних рівнянь, характерними прикладами її застосувань, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами дослідження та розв'язування окремих класів диференціальних рівнянь.

Предмет навчальної дисципліни:

Скалярні та векторні звичайні диференціальні рівняння першого та вищих порядків, квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними; задачі про відшукання, існування, єдиність, залежність від початкових даних та параметрів розв'язків диференціальних рівнянь.

Вимоги до знань та вмінь

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно володіти основами математичного аналізу (зокрема, матеріалом розділів "Границі", "Похідна", "Інтеграл Рімана", "Функціональні ряди", "Диференціальне числення функцій кількох змінних", "Існування оберненого відображення та неявної функції", "Метричні простори", "Принцип стиснених відображень"), лінійної алгебри (зокрема, матеріалом розділів "Лінійні простори", "Лінійні оператори", "Жорданова нормальна форма", "Квадратичні форми"), аналітичної геометрії (зокрема, матеріалом розділів "Системи координат", "Криві другого порядку").

Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра математики.

Дисципліна "Диференціальні рівняння" є складовою циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Її викладанню передують вивчення таких математичних дисциплін, як "Аналітична геометрія", "Математичний аналіз I", "Лінійна алгебра". Паралельно з нею узгоджено, шляхом взаємного обміну необхідними поняттями та фактами вивчаються такі дисципліни, як "Математичний аналіз II", "Диференціальна геометрія та топологія". У подальшому матеріал курсу "Диференціальні рівняння" використовується при викладанні таких дисциплін: "Рівняння математичної фізики", "Функціональний аналіз", "Варіаційне числення та методи оптимізації", "Теоретична механіка", "Теоретична фізика", низки спеціальних курсів.

Система поточного, модульного та підсумкового контролю

Навчальна дисципліна "Диференціальні рівняння" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 4 змістових модулі.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою в кожному семестрі окремо.

Контроль знань.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Оцінювання за формами контролю:

Поточний –

- усна відповідь, домашня письмова робота, доповнення – по 1 балу, але в сумі не більше 10 балів за змістовий модуль
- письмові самостійні – (1 на змістовий модуль) – 10 балів
- виконання індивідуальних завдань – 30 балів
- модульна контрольна робота або колоквиум – 50 балів

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною системою, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен із двох модулів у семестрі та оцінки за іспит за наступною формулою.

І семестр

	<i>Змістовий модуль 1</i>	<i>Змістовий модуль 2</i>	<i>Залік</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	40% $k_{залік}=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100
Оцінка (бали)	30	30	40	100

II семестр

	<i>Змістовий модуль 3</i>	<i>Змістовий модуль 4</i>	<i>Іспит</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_3=0,3$	30% $k_4=0,3$	40% $k_{ісп}=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100
Оцінка (бали)	30	30	40	100

При цьому, кількість балів відповідає оцінці:

1-34 – «незадовільно» з *обов'язковим повторним вивченням дисципліни;*

35-59 – «незадовільно» з *можливістю повторного складання;*

60-64 – «задовільно» («*достатньо*»);

65-74 – «задовільно»;

75 - 84 – «добре»;

85 - 89 – «добре» («*дуже добре*»);

90 - 100 – «відмінно».

Шкала відповідності¹

За 100-бальною шкалою	Оцінка іспиту за національною шкалою		Оцінка заліку за національною шкалою
90 – 100	5	відмінно	Зараховано
85 – 89	4	добре	
75 – 84		задовільно	
65 – 74	3		
60 – 64		2	незадовільно
35 – 59			
1 – 34			

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ
I семестр**

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		Лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
Змістовий модуль 1					
Скалярні диференціальні рівняння першого порядку					
1	Інтегрування окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку	6	10	16	
2	Елементи якісного аналізу інтегровних рівнянь першого порядку	6	2	12	
3	Рівняння в повних диференціалах та інтегрувальний множник	4	8	10	
Модульна контрольна робота			2		
Змістовий модуль 2					
Елементи загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь на площині					
4	Теореми існування, єдиності та продовжуваності розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку	8	2	14	
5	Симетричні рівняння та автономні системи на площині, класифікація їхніх портретів в околі особливої точки за лінійним наближенням	6	4	12	
6	Неявні рівняння та особливі розв'язки	4	4	12	
Модульна контрольна робота			2		
	ВСЬОГО	34	34	76	

Загальний обсяг 144 год., в тому числі:

Лекцій – 34 год.

Семінари/лабораторні, практичні – 34 год.

Самостійна робота - 76 год.

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ
II семестр**

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
Змістовий модуль 3					
Диференціальні рівняння вищих порядків.					
Теорія лінійних диференціальних рівнянь та систем					
7	Інтегрування та зниження порядку диференціальних рівнянь вищих порядків	2	2	6	
8	Лінійні диференціальні рівняння довільного порядку	8	8	14	
9	Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь другого порядку	8	4	12	
10	Системи лінійних диференціальних рівнянь	8	8	16	
Модульна контрольна робота			2		
Змістовий модуль 4					
Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь та теорії стійкості					
11	Теореми про існування, єдиність, продовжуваність та характер залежності розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів	10	2	16	
12	Теорія перших інтегралів систем диференціальних рівнянь	4	2	8	
13	Основи теорії стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь	6	4	10	
14	Метод характеристик розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку	5	2	9	
Колоквіум				4	
ВСЬОГО		51	34	95	

Загальний обсяг 180 год., в тому числі:
 Лекцій – 51 год.
 Семінари/лабораторні, практичні – 34 год.
 Самостійна робота – 95 год

Змістовий модуль 1. Скалярні диференціальні рівняння першого порядку

Тема 1. Інтегрування окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку

Лекція 1. Виникнення та основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Історична довідка. Геометричні та фізичні задачі, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Розв'язок. Задача Коші. Поле напрямів. Інтегральна крива.

Лабораторна робота 1 (2 год.). Задачі на складання диференціальних рівнянь. Поняття розв'язку [1, Вступ], [2, п.1.3], [3, §1, 3] .

Завдання для самостійної роботи 1 (4 год.) Виконати один з варіантів завдання 1.1 а) [4], завдання позааудиторної роботи до заняття 1 [5]. Опрацювати [1, Вступ], [2, п.1.3]

Лекція 2. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку.

Рівняння з відокремлюваними змінними. Заміни змінних в диференціальних рівняннях 1-го порядку. Однорідне та квазіоднорідне рівняння.

Лабораторна робота 2 (2 год.). Рівняння з відокремлюваними змінними. [2, п. 1.2],

Лабораторна робота 3 (2 год.). Однорідні та квазіоднорідні рівняння. [2, п. 1.4]

Завдання для самостійної роботи 2 (4 год.). Виконати завдання позааудиторної роботи до занять 2,3,4 [5]. Опрацювати [1,п.п. 1.1.1, 1.1.3], [2, п.п. 1.2, 1.4]

Лекція 3. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку (продовження)

Лінійне рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати.

Лабораторна робота 4 (2 год.). Лінійні рівняння. Метод Бернуллі. Метод Лагранжа. [2, п. 1.5].

Лабораторна робота 5 (2 год.). Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати. [2, п. 1.5].

Завдання для самостійної роботи 3 (8 год.) Виконати один з варіантів завдання 4 [4], завдання позааудиторної роботи до занять 5,6,7 [5]. Опрацювати [1, п.п. 1.1.2, 1.1.4], [2, п. 1.5]

Тема 2. Елементи якісного аналізу інтегровних рівнянь першого порядку

Лекція 4. Скалярне автономне рівняння першого порядку.

Теорема існування та єдиності розв'язку. Межі інтервалу існування. Особливі розв'язки, умови їх існування.

Завдання для самостійної роботи 4 (2 год.) Завершити виконання завдання 1 [4]. Опрацювати [1, п.1.2.1].

Лекція 5. Векторне поле на прямій. Побудова графіків інтегральних кривих за графіком функції, що описує векторне поле. Аналіз моделі одновидової популяції.

Завдання для самостійної роботи 5 (4 год.) Виконати один з варіантів завдання 2.2 [4]. Опрацювати [1, п.п. 1.2.2, 1.2.3].

Лекція 6. Лінійне періодичне рівняння першого порядку.

Мультиплікатор. Поведінка розв'язків однорідного періодичного рівняння. Існування періодичного розв'язку неоднорідного рівняння.

Лабораторна робота 6 (2 год.). Побудова портретів автономних скалярних рівнянь першого порядку. Дослідження моделі економічного росту. Особливі розв'язки. Дослідження розв'язків лінійних рівнянь. [1, п.п. 1.2.4, 1.2.5, 1.3], [3, § 5].

Завдання для самостійної роботи 6 (6 год.) Опрацювати теоретичний матеріал та задачі до [1, п.п. 1.2.4, 1.2.5, 1.3]

Тема 3. Рівняння в повних диференціалах та інтегровальний множник

Лекція 7. Рівняння в повних диференціалах.

Означення рівняння в повних диференціалах. Точні та замкнені диференціальні форми. Інтегрування в квадратурах.

Лабораторна робота 7 (2 год.). Розв'язування рівнянь в повних диференціалах. [2, п. 1.6].

Завдання для самостійної роботи 7 (2 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи заняття 7 [5]. Опрацювати [1, п.п. 1.7.1], [2, п. 1.6].

Лекція 8. Інтегровальний множник.

Означення інтегровального множника. Його існування та неєдиність. Деякі способи відшукування інтегровального множника.

Лабораторна робота 8 (2 год.). Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою інтегровального множника. [2, п.п. 1.6]

Лабораторна робота 9 (2 год.). Способи відшукування інтегровального множника. [2, п. 1.6]

Лабораторна робота 10 (2 год.). Розв'язування різних типів диференціальних рівнянь. [3, §9].

Завдання для самостійної роботи 8 (8 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи занять 8, 9 [5]. Опрацювати [1, п.1.7.2], [2, п.п. 1.6].

Лабораторна робота 11 (2 год.). Модульна контрольна робота.

Контрольні запитання та завдання.

1. Що таке розв'язок диференціального рівняння, поле напрямів, інтегральна крива.
2. Сформулювати теорему існування розв'язку задачі Коші для скалярного автономного рівняння.
3. Сформулювати критерій існування особливого розв'язку такого рівняння.
4. Узагальнити теорію автономного скалярного рівняння на випадок рівняння з відокремлюваними змінними.
5. Описати методи інтегрування в квадратурах: однорідних, квазіоднорідних, лінійних рівнянь, рівнянь Бернуллі та Ріккати .
6. Сформулювати теорему про обмежений розв'язок лінійного рівняння.
7. Сформулювати теорему про періодичний розв'язок лінійного рівняння.
8. Чи є зв'язок між існуванням обмеженого і періодичного розв'язку лінійного рівняння?
9. Означення та коефіцієнтний критерій рівняння в повних диференціалах. Як знайти загальний інтеграл такого рівняння.

10. Дати означення інтегрувального множника, перелічити способи його відшукування.

Зразок типової модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля

1. Розв'язати рівняння: $y' - xy^2 = 2xy$.
2. Розв'язати рівняння: $x^2 y' + xy + 1 = 0$.
3. Розв'язати рівняння: $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$.
4. Розв'язати рівняння: $2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}$.
5. Методом інтегрувального множника розв'язати рівняння: $dx + (x + y^2 e^y) dy = 0$.
6. Розв'язати рівняння: $xy' = \left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 - x^2$.

Змістовий модуль 2. Елементи загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь на площині

Тема 4. Теореми існування, єдиності та продовжуваності розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку

Лекція 9. Теореми Пеано та Пікара.

Ламані Ейлера. Формулювання теореми Пеано. Зведення задачі Коші до інтегрального рівняння. Метод послідовних наближень. Теорема Пікара.

Завдання для самостійної роботи 9 (2 год.) Розпочати виконання завдання 3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4].

Лекція 10. Доведення теореми Пікара.

Обґрунтування збіжності методу послідовних наближень. Оцінка відхилення точного і наближеного розв'язку. Єдиність розв'язку.

Завдання для самостійної роботи 10 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 3.3 [4]. Опрацювати теоретичний матеріал та задачі до [1, п. 1.4], [2, п. 1.7].

Лекція 11. Продовження розв'язку початкової задачі.

Лема про склеювання розв'язків. Теорема про продовження графіка розв'язку за межі компакту. Непродовжувані розв'язки.

Завдання для самостійної роботи 11 (2 год.) Завершити виконання завдання 3 [4]. Опрацювати [1, п.1.5.1].

Лекція 12. Елементи геометричного аналізу розв'язків рівнянь першого порядку.

Теорема Кнезера. Теорема про порівняння та її застосування до задачі про продовження розв'язку. Ізокліни, області зростання, спадання, опуклості, вгнутості інтегральних кривих.

Лабораторна робота 12 (2 год.). Застосування теореми Пікара та методу послідовних наближень. Оцінювання відхилення наближень від точного розв'язку. [1, п. 1.4], [2, п. 1.7], [3, §7].

Елементи геометричного аналізу диференціальних рівнянь першого порядку. Застосування теореми порівняння. Побудова ізоклін, відшукування областей зростання, спадання, опуклості, вгнутості інтегральних кривих. [2, п.п. 1.1, 1.7], [3, §1].

Завдання для самостійної роботи 12 (6 год.) Виконати один з варіантів завдання 2.1 [4].
Опрацювати [1, п.п. 1.5.2, 1.5.3, 1.6], [2, п.п. 1.1, 1.7]

Тема 5. Симетричні рівняння та автономні системи на площині, класифікація їхніх портретів в околі особливої точки за лінійним наближенням

Лекція 13. Симетричні рівняння та автономні системи на площині.

Поле напрямів та рівняння в симетричній формі. Векторні поля та автономні системи на площині. Фазові криві. Зв'язок з рівнянням у симетричній формі (рівнянням Пфаффа). Модель Лотки-Вольтерри. Її інтегрування та дослідження фазового портрету.

Завдання для самостійної роботи 13 (2 год.) Виконати один з варіантів завдання 2.3 [4].
Опрацювати [1, п.п. 1.8.1 – 1.8.3], [2, п. 5.5].

Лекція 14. Особливі точки.

Лінеаризація рівняння Пфаффа та автономної системи в околі особливої точки. Лінеаризована система. Типи її фазових портретів: вузол, сідло.

Завдання для самостійної роботи 14 (4 год.) Опрацювати [1, п.п. 1.9.1, 1.9.2], [2, п. 5.5].

Лекція 15. Особливі точки (продовження).

Типи її фазових портретів: вироджений та дикритичний вузли, фокус, центр. Формулювання теореми Гробмана-Хартмана. Про проблему центра і фокуса.

Лабораторна робота 13 (2 год.). Визначення типів і побудова фазових портретів лінеаризованих систем. [1, п.п. 1.9.2 – 1.9.4],

Лабораторна робота 14 (2 год.). Визначення типів і побудова фазових портретів лінеаризованих систем (продовження). [1, п.п. 1.9.2 – 1.9.4], [3, §16].

Завдання для самостійної роботи 15 (6 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи для заняття 15 [5]. Опрацювати [1, п.п. 1.9.2 – 1.9.4], [2, п. 5.5].

Тема 6. Неявні рівняння та особливі розв'язки

Лекція 16. Рівняння, не розв'язані відносно похідної (неявні рівняння).

Теорема існування та єдиності розв'язку неявного рівняння. Особливість поняття єдиності розв'язку. Метод параметризації. Рівняння Лагранжа та Клеро.

Завдання для самостійної роботи 16 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 5.1 [4], завдання позааудиторної роботи до заняття 12 [5]. Опрацювати [1, п.п. 1.10.1, 1.10.2], [2, п.1.8]. Виконати один із варіантів завдань 5.2, 5.4 [4], завдання позааудиторної роботи до заняття 13 [5]. Опрацювати [1, п. 1.10.3], [2, п. 1.8].

Лекція 17. Геометрична інтерпретація неявного рівняння. Особливі розв'язки. Геометрична інтерпретація. Контактна площина. Регулярна точка. Дискримінантні криві та особливі розв'язки. Методи відшукування особливих розв'язків. Необхідні, а також достатні умови існування особливих розв'язків. Особливі розв'язки рівняння Клеро.

Лабораторна робота 15 (2 год.). Інтегрування неявних рівнянь методом параметризації. [2, п. 1.8], [3, §8]. Особливі розв'язки. [1, п. 1.10.4], [3, §8].

Лабораторна робота 16 (2 год.). Особливі розв'язки. [1, п. 1.10.4], [3, §8].

Завдання для самостійної роботи 17 (8 год.) Виконати один із варіантів завдання 5.3 [4], завдання позааудиторної роботи до заняття 14 [5]. Опрацювати [1, п. 1.10.4], [2, п. 1.8]

Лабораторна робота 17 (2 год.). Модульна контрольна робота.

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулювати теорему Пікара.
2. Описати алгоритм побудови послідовних наближень. Який вигляд має оцінка похибки?
3. Сформулювати теорему Пеано. Навести приклад, коли умови цієї теореми не гарантують єдиність розв'язку задачі Коші.
4. Сформулювати теорему про продовження розв'язку. Що таке непродовжуваний розв'язок.
5. Довести теорему Кнезера.
6. Сформулювати теорему про порівняння.
7. Як можна застосувати теорему порівняння для дослідження питання про продовження розв'язку на нескінченний інтервал.
8. Описати особливу точку типу вузол.
9. Описати особливу точку типу сідло.
10. Описати особливу точку типу вироджений вузол.
11. Описати особливу точку типу фокус.
12. Описати особливу точку типу центр.
13. Задача Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.
14. Сформулювати теорему про $\exists!$ розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.
15. Записати рівняння Лагранжа. До якого інтегровного рівняння воно зводиться за допомогою параметризації?
16. Записати рівняння Клеро та його однопараметричну сім'ю розв'язків.
17. Що таке особливий розв'язок? Описати способи його відшукування.

Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля

1. Перевірити виконання умов теореми Пікара та знайти перші три послідовні наближення $y' = x - y^2$, $y(2) = 1$, $|x - 2| \leq 1$, $|y - 1| \leq 3$.
2. Дослідити особливу точку системи
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y; \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$
3. Дослідити особливі точки системи
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8; \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$$
4. Розв'язати рівняння та знайти розв'язок задачі Коші $xy'^2 - 2yy' + x = 0$, $M(1;1)$.

5. Знайти особливий розв'язок, якщо в результаті інтегрування диференціального рівняння одержано співвідношення $C^2 - 2(x - C)^2 = 4y$.

Змістовий модуль 3. Диференціальні рівняння вищих порядків.

Теорія лінійних диференціальних рівнянь та систем

Тема 7. Інтегрування та зниження порядку диференціальних рівнянь вищих порядків

Лекція 18. Способи зниження порядку диференціальних рівнянь. Типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

Рівняння, які не містять шуканої функції та кількох перших її похідних. Неповні рівняння. Автономні рівняння. Однорідні та квазіоднорідні рівняння. Рівняння, які мають вигляд повної похідної та звідні до них.

Лабораторна робота 18 (2 год.). Зниження порядку та інтегрування рівнянь вищих порядків. [2, п. 2.1], [3, §10].

Завдання для самостійної роботи 18 (6 год.) Виконати один із варіантів завдання 6.1 [4], завдання для позааудиторної роботи до занять 5, 6 [6]. Опрацювати [1, п.п. 4.2.1 – 4.2.5], [2, п. 2.1]

Тема 8. Лінійні диференціальні рівняння довільного порядку

Лекція 19. Загальна теорія лінійних рівнянь.

Формулювання теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Лінійна залежність та незалежність системи функцій. Вронскіан та необхідна умова лінійної залежності. Простір розв'язків лінійного однорідного рівняння (ЛОР). Фундаментальна система розв'язків, її існування. Властивість вронскіана системи розв'язків ЛОР. Теорема про загальний розв'язок ЛОР.

Завдання для самостійної роботи 19 (2 год.) Виконати один із варіантів завдання 7.1 [4], виконати завдання позааудиторної роботи до заняття 17 [5]. Опрацювати [1, п. 2.1.3], [2, п. 2.3].

Лекція 20. Загальна теорія лінійних рівнянь (продовження).

Побудова ЛОР за його фундаментальною системою розв'язків. Однозначність такої побудови. Формула Остроградського-Ліувілля. Формула Абеля. Зниження порядку лінійного рівняння за допомогою відомого нетривіального розв'язку.

Лабораторна робота 19 (2 год.). Лінійна залежність та незалежність функцій. Вронскіан. Побудова ЛОР за його фундаментальною системою розв'язків. Інтегрування лінійних рівнянь за допомогою формули Абеля та шляхом послідовного зниження порядку, якщо відомі лінійно незалежні частинні розв'язки. [1, п.п. 2.1.4, 2.1.5], [2, п.2.3], [3, §12].

Завдання для самостійної роботи 20 (4 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи до заняття 18 [5]. Опрацювати [1, п.п. 2.1.4, 2.1.5], [2, п.2.3].

Лекція 21. ЛОР зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичний поліном. Комплекснозначні розв'язки. Випадок простих коренів характеристичного полінома. Випадок кратних коренів характеристичного полінома. Рівняння Ейлера.

Лабораторна робота 20 (2 год.). Розв'язування ЛОР зі сталими коефіцієнтами та рівняння Ейлера. [1, п. 2.2], [2, п. 2.5], [3, §11].

Завдання для самостійної роботи 21 (4 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи до заняття 1 [6]. Опрацювати [1, п. 2.2], [2, п. 2.5].

Лекція 22. Лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР).

Структура множини розв'язків лінійного неоднорідного рівняння. Лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами та квазіполіномом у правій частині:

Метод невизначених коефіцієнтів. Його обґрунтування в нерезонансному та резонансному випадках. Метод комплексних амплітуд і відшукування частинного розв'язку рівняння. Метод варіації довільних сталих для лінійного неоднорідного рівняння.

Лабораторна робота 21 (2 год.). Розв'язування ЛНР методом невизначених коефіцієнтів. [2, п. 2.6], [3, §11]

Лабораторна робота 22 (2 год.). Розв'язування ЛНР методом варіації довільних сталих. [2, п.п. 2.4], [3, §11].

Завдання для самостійної роботи 22 (4 год.) Виконати один із варіантів завдань 6.2, 6.3 [4], завдання позааудиторної роботи до занять 2, 3 [6]. Опрацювати [1, п.п. 2.4.3, 2.4.4, 2.5], [2, п.п. 2.4, 2.6]

Тема 9. Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь другого порядку

Лекція 23. Лінійне рівняння другого порядку з регулярною особливою точкою.

Побудова розв'язків у вигляді узагальнених степеневих рядів. Структура другого лінійно незалежного розв'язку.

Завдання для самостійної роботи 23 (2 год.) Виконати один із варіантів завдань 7.2 [4] [1, п. 3.3.1, 3.3.2]

Лекція 24. Рівняння Лежандра. Гаусса. Бесселя.

Лабораторна робота 23 (2 год.). Відшукування розв'язків ЛОР 2-го порядку у вигляді степеневих та узагальнено степеневих рядів. [2, п.п. 3.2-3.4], [3, §18].

Завдання для самостійної роботи 24 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 7.3 [4]. Опрацювати [1, п.п. 3.3.3, 3.3.4], [2, п.п. 3.2-3.4].

Лекція 25. Коливність розв'язків лінійного рівняння другого порядку.

Лема про відсутність точок скупчення нулів його розв'язків. Теорема порівняння. Теорема Штурма. Теорема про неколивність. Оцінки відстані між нулями розв'язків. Теорема про існування безлічі нулів на півосі.

Завдання для самостійної роботи 25 (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язати задачі [1, п.п. 3.1.1 –3.1.3, 3.2].

Лекція 26. Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Функція Гріна. Задача на власні значення.

Лабораторна робота 24 (2 год.). Задачі на коливність розв'язків ЛОР. Розв'язування крайових задач. [1, п. 3.2, 3.4], [3, §§ 12, 13].

Завдання для самостійної роботи 26 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 7.4 [4]. Опрацювати [1, п. 3.2, 3.4], [2, п. 3.5].

Тема 10. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Лекція 27. Загальна теорія лінійних однорідних систем.

Теорема існування та єдиності розв'язку лінійної однорідної системи (ЛОС). Фазовий вектор. Лінійна система диференціальних рівнянь, еквівалентна лінійному рівнянню вищого порядку. Доведення теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЛОР. Фундаментальна система розв'язків ЛОС, її існування. Фундаментальна матриця. Теорема про загальний розв'язок. Фундаментальна матриця. Теорема про загальний розв'язок. Формула Якобі.

Завдання для самостійної роботи 27 (4 год.) Опрацювати [1, п.п. 2.1.1 – 2.1.2, 2.1.6], [2, п. 4.2].

Лекція 28. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами.

Побудова фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера та його узагальнення.

Лабораторна робота 25 (2 год.). Розв'язування ЛОС зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера. [2, п. 4.3], [3, § 14].

Завдання для самостійної роботи 28 (2 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи до заняття 11 [6]. Опрацювати [1, п.п. 2.3.1 – 2.3.2], [2, п. 4.3].

Лекція 29. Експонента матриці. Її властивості та структура.

Лабораторна робота 26 (2 год.). Відшукання експонент матриць. [2, п. 4.3], [3, § 14].

Завдання для самостійної роботи 29 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 8.1 в частині, яка стосується однорідних систем [4]. Опрацювати [1, п. 2.3.4], [2, п. 4.3], [8, §§ 21, 22].

Лекція 30. Лінійні неоднорідні системи (ЛНС).

Лінійна система зі сталою матрицею та квазіполіноміальним вільним членом. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод варіації довільних сталих для ЛНС. Матрицант.

Лабораторна робота 27 (2 год.). Розв'язування ЛНС методом невизначених коефіцієнтів [2, п. 4.4], [3, § 14]

Лабораторна робота 28 (2 год.). Розв'язування ЛНС методом варіації довільних сталих. [2, п. 4.4], [3, § 14]

Завдання для самостійної роботи 30 (6 год.) Завершити виконання одного із варіантів завдання 8.1 [4], виконати завдання позааудиторної роботи заняття 14 [6]. Опрацювати [1, п.п. 2.4.1-2.4.2, 2.4.5], [2, п. 4.4].

Лабораторна робота 29 (2 год.). Модульна контрольна робота.

Контрольні запитання та завдання

1. Перелічити типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку, інтегровні типи.
2. Записати підстановки, які дозволяють знижувати порядок таких рівнянь.
3. Дати означення лінійно незалежної системи функцій.
4. Що таке вронскіан.
5. Чи може вронскіан лінійно залежної системи функцій бути відмінним від нуля принаймні в деякій точці.
6. Сформулювати критерій ЛНЗ розв'язків ЛОР в теорімах вронскіана.
7. Записати формулу Остроградського-Ліувілля.
8. Сформулювати теорему про існування ФСР ЛОР.
9. Сформулювати теорему про загальний розв'язок ЛОР.
10. Описати спосіб побудови ЛОР за ФСР.
11. Що таке характеристичне рівняння ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Описати алгоритм побудови ФСР такого рівняння.
12. Як звести рівняння Ейлера до ЛОР зі сталими коефіцієнтами.
13. Сформулювати алгоритм застосування методу невизначених коефіцієнтів для ЛНР.
14. Описати метод варіації довільної сталої для ЛНР.
15. Описати канонічні форми ЛОР 2-го порядку.
16. Дати означення коливного розв'язку ЛОР 2-го порядку.
17. Сформулювати для ЛОР 2-го порядку: теорему про неколивність, теорему Штурма, теорему порівняння.
18. Як застосовується теорема порівняння для встановлення оцінки відстані між нулями.
19. Що таке узагальнений степеневий ряд? Який вигляд має ЛОР 2 порядку з регулярною особливою точкою $t=0$? $t=1$? Що таке визначальне рівняння.
20. Для якого кореня визначального рівняння завжди існує розв'язок ЛОР 2-го порядку у вигляді узагальненого степеневого ряду?
21. Випишіть рівняння Гауса, рівняння Лежандра, рівняння Бесселя.
22. Постановка крайової задачі для лінійного рівняння 2 порядку.
23. Що таке функція Гріна?
24. Сформулювати теорему про $\exists!$ розв'язку крайової задачі.
25. Задача Штурма-Ліувілля, власні функції і власні значення.
26. Теорема Стеклова.
27. Сформулювати теорему про $\exists!$ розв'язку задачі Коші для лінійної системи.
28. Що таке фундаментальна матриця ЛОС. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОС?
29. Що таке характеристичне рівняння? Опишіть метод Ейлера побудови ФСР для ЛОС зі сталими коефіцієнтами.
30. Дати означення та описати основні властивості експоненти матриці.
31. Описати метод варіації довільної сталої для ЛНС.

Зразок типової модульної контрольної роботи 3-го змістового модуля

1. Знизивши порядок рівняння, звести його до рівняння першого порядку $y'^2 + 2xyu'' = 0$.
2. Перевірити лінійну незалежність функцій 1 , $\arcsin x$, $\arccos x$.
3. Записати загальний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами, якщо корені його характеристичного полінома: $\pm i$ – кратності два, 3 .
4. Розв'язати рівняння $y''' + y'' - 8y' - 12y = xe^{3x}$.
5. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 1/\cos 2x$.

6. Розв'язати рівняння $x^2 y'' - xy' + y = x \ln x + x^2$.

7. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\cos t, \\ \dot{y} = 2x - y + e^t. \end{cases}$$

Змістовий модуль 4. Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь та теорії стійкості

Тема 11. Теореми про існування, єдиність, продовжуваність та характер залежності розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів

Лекція 31. Існування розв'язку задачі Коші. Теорема Пеано.

Завдання для самостійної роботи 31 (2 год.) Опрацювати [1, п. 5.1.1]. Задачі 1, 2 п. 5.1 [1].

Лекція 32. Єдиність та продовжуваність розв'язків.

Локальна умова Ліпшица та теорема про єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема Пікара. Продовжуваність розв'язків.

Завдання для самостійної роботи 32 (2 год.) Опрацювати [1, п. 5.1.2, 5.1.3]. Задачі 3, 4 п. 5.1 [1].

Лекція 33. Поняття про коректність задачі Коші. Теорема про стійкість на відріжку розв'язку задачі Коші відносно збурень початкових даних та правих частин.

Завдання для самостійної роботи 33 (4 год.) Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язати задачі [1, п. 5.2].

Лекція 34. Залежність розв'язків від початкових даних та параметрів

Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів у природній області визначення. Теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими значеннями, за початковими даними та параметрами.

Завдання для самостійної роботи 34 (4 год.) Опрацювати теоретичний матеріал та задачі [1, п. 5.3].

Лекція 35. Асимптотичні розвинення розв'язків.

Система у варіаціях. Існування вищих похідних розв'язків за початковими даними та параметрами. Асимптотичні розвинення розв'язків за незалежною змінною та за параметрами.

Лабораторна робота 30 (2 год.). Асимптотичні розвинення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь за незалежною змінною та за параметрами. [1, п. 5.4], [3, §18].

Завдання для самостійної роботи 35 (4 год.) Опрацювати теоретичний матеріал та задачі [1, п. 5.4].

Тема 12. Теорія перших інтегралів систем диференціальних рівнянь

Лекція 36. Перші інтеграли нормальних систем.

Означення першого інтеграла. Його геометричний зміст. Аналітичний критерій інтеграла. Функціонально незалежні перші інтеграли. Умова незалежності перших

інтегралів. Теорема про відшукування розв'язку задачі Коші за допомогою повного набору перших інтегралів.

Завдання для самостійної роботи 36 (4 год.) Опрацювати [1, п.п. 4.3.2, 4.3.3, п. 5.3.5], [2, п. 4.1]

Лекція 37. Перші інтеграли автономних систем та систем в симетричній формі.

Автономна система та відповідна система у симетричній формі. Зв'язок між фазовими кривими першої та інтегральними кривими другої. Перші інтеграли автономної системи та системи у симетричній формі. Аналітичний критерій автономного інтеграла. Інтегровні комбінації. Приклад: Рівняння Ейлера руху тіла навколо точки закріплення.

Лабораторна робота 31 (2 год.). Інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь [2, п. 4.1], [3, § 19].

Завдання для самостійної роботи 37 (4 год.) Виконати завдання позааудиторної роботи до занять 9, 10 [6]. Опрацювати [1, п.п. 4.3.5, 4.3.6], [2, п. 4.1].

Тема 13. Основи теорії стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь

Лекція 38. Стійкість за Ляпуновим. Асимптотична стійкість. Стійкість лінійних систем. Стійкість лінійної системи зі сталою матрицею.

Завдання для самостійної роботи 38 (2 год.) Виконати один із варіантів завдання 9.1 [4]. Опрацювати [1, п.п. 5.5.1-5.5.3], [2, п.п. 5.1, 5.2].

Лекція 39. Теорема про стійкість за першим наближенням.

Лабораторна робота 32 (2 год.). Стійкість положень рівноваги автономних систем. [1, п. 5.5.4], [2, п. 5.3], [3, § 15].

Завдання для самостійної роботи 39 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 9.2 [4], завдання позааудиторної роботи до заняття 14 [6]. Опрацювати [1, п. 5.5.4], [2, п. 5.3].

Лекція 40. Основи прямого методу Ляпунова в теорії стійкості.

Знаковизначені функції. Перша теорема Ляпунова про стійкість. Теорема про асимптотичну стійкість. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Про теорему Четаєва про нестійкість та теорему про нестійкість за першим наближенням.

Лабораторна робота 33 (2 год.). Дослідження стійкості за допомогою функцій Ляпунова. [1, п. 5.6], [2, п. 5.4], [3, § 15].

Завдання для самостійної роботи 40 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 9.3 [4]. Опрацювати [1, п. 5.6], [2, п. 5.4].

Тема 14. Метод характеристик розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

Лекція 41. Відшукування загальних розв'язків лінійних та квазілінійних лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

ЛОР з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Загальний розв'язок. Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Інтегральні поверхні системи характеристик як розв'язки.

Завдання для самостійної роботи 41 (4 год.) Опрацювати [1, п. 6.1.1, 6.1.2], [2, Додаток 1].

Лекція 42. Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку та її розв'язання методом характеристик. Теорема існування локального розв'язку задачі Коші.

Лабораторна робота 34 (2 год.). Відшукування розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. [1, п. 6.1.3], [3, § 15].

Завдання для самостійної роботи 42 (4 год.) Виконати один із варіантів завдання 9.2 [4]. Опрацювати [1, п. 6.1.3], [2, Додаток 1].

Лекція 43 (1 година) Рівняння Гопфа.

Завдання для самостійної роботи 43 (1 год.) Опрацювати [1, п. 6.1.3]. Задача 3 п. 6.1 [1].

Контрольні запитання та завдання.

1. Сформулювати теореми Пікара та Пеано для нормальної системи.
2. Що таке локальна умова Ліпшица? Сформулювати теорему єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Що розуміють під коректністю задачі Коші. Сформулюйте теорему про стійкість розв'язку задачі Коші щодо збурення початкових даних та правої частини.
4. Сформулювати теорему про неперервність розв'язку як функції часу, початкових даних та параметрів у його природній області визначення.
5. Сформулювати теорему про диференційовність у природній області визначення.
6. Що таке 1-й інтеграл нормальної системи. Навести аналітичний критерій 1-го інтеграла. Який набір 1-их інтегралів називають повним.
7. Сформулювати теорему про існування повного набору перших інтегралів.
8. Яким чином повний набір 1-их інтегралів пов'язаний із загальним розв'язком нормальної системи.
9. Навести означення стійкості, нестійкості, асимптотичної стійкості розв'язку.
10. Сформулювати критерії стійкості та асимптотичної стійкості лінійної системи в термінах її фундаментальної матриці.
11. Навести критерій стійкості ЛОС зі сталою матрицею.
12. Сформулювати теорему про стійкість за першим наближенням.
13. Що таке знаковизначена функція?
14. Сформулювати 1-у теорему Ляпунова про стійкість.
15. Сформулювати теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість.
16. Сформулювати теорему Четаєва про нестійкість. Сформулювати теорему про нестійкість за першим наближенням.
17. Описати метод характеристик розв'язування задачі Коші для квазілінійних рівнянь з частинними похідними 1-го порядку.

Перелік питань на іспит

Теорема Пікара. Продовження розв'язку початкової задачі. Теорема про порівняння та її застосування до задачі про продовження розв'язку.

Векторні поля та автономні системи на площині. Фазові криві. Зв'язок з рівнянням у симетричній формі (рівнянням Пфаффа). Особливі точки, положення рівноваги. Лінеаризація векторного поля в околі особливої точки. Лінеаризована система. Типи її фазових портретів (вузол, сідло, фокус, центр, вироджений та дикритичний вузли).

Диференціальні рівняння та системи рівнянь вищих порядків. Фазовий вектор. Нормальна система диференціальних рівнянь, еквівалентна рівнянню вищого порядку. Способи зниження порядку диференціальних рівнянь. Типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

Лінійні рівняння довільного порядку. Лінійна залежність та незалежність системи функцій. Вронскіан та необхідна умова лінійної залежності. Простір розв'язків лінійного однорідного рівняння (ЛОР). Фундаментальна система розв'язків, її існування. Властивість вронскіана системи розв'язків ЛОР. Теорема про загальний розв'язок ЛОР. Побудова ЛОР за його фундаментальною системою розв'язків. Однозначність такої побудови. Формула Ліувілля-Остроградського. Формула Абеля.

ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Характеристичний поліном. Комплекснозначні розв'язки. Випадок простих коренів характеристичного полінома. Випадок кратних коренів характеристичного рівняння. Рівняння Ейлера. Структура множини розв'язків лінійного неоднорідного рівняння. Лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами та квазіполіномом у правій частині. Метод невизначених коефіцієнтів. Його обґрунтування: випадок, коли контрольне число не є коренем характеристичного полінома; випадок, коли воно є r -кратним коренем. Метод комплексних амплітуд і відшукування частинного розв'язку ЛНР з квазіполіноміальним вільним членом Метод варіації довільних сталих для лінійного неоднорідного рівняння.

Лінійне рівняння другого порядку з регулярною особливою точкою. Побудова розв'язків у вигляді узагальнених степеневих рядів. Структура другого лінійно незалежного розв'язку. Рівняння Гаусса, Лежандра, Бесселя.

Коливність розв'язків лінійного рівняння другого порядку. Теорема про відсутність точок скупчення нулів його розв'язків. Теорема порівняння. Теорема Штурма. Теорема про неколивність. Оцінки відстані між нулями розв'язків. Теорема про існування безлічі нулів на півосі.

Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Функція Гріна.

Теорема існування та єдиності розв'язку лінійної однорідної системи (ЛОС). Фундаментальна система розв'язків ЛОС, її існування. Фундаментальна матриця. Теорема про загальний розв'язок. Формула Якобі. Лінійні однорідні системи з сталими коефіцієнтами. Побудова фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера та його узагальнення. Експонента матриці. Її властивості та структура. Лінійна система зі сталою матрицею та квазіполіноміальним вільним членом. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод варіації довільних сталих для лінійних неоднорідних систем. Матрицант.

Поняття про коректність задачі Коші. Теорема Пеано. Локальна умова Ліпшица та теорема про єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема про стійкість на відрізку розв'язку задачі Коші відносно збурень початкових даних та правих частин. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів у природній області визначення. Теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими значеннями, за початковими даними та параметрами. Система у варіаціях. Асимптотичні розвинення розв'язків за незалежною змінною та за параметрами.

Перші інтеграли нормальних систем. Геометричний зміст першого інтеграла. Аналітичний критерій інтеграла. Функціонально незалежні перші інтеграли. Умова незалежності перших інтегралів. Теорема про відшукування розв'язку задачі Коші за допомогою повного набору перших інтегралів.

Автономна система та відповідна система у симетричній формі. Зв'язок між фазовими кривими першої та інтегральними кривими другої. Перші інтеграли автономної системи та системи у симетричній формі. Аналітичний критерій автономного інтеграла. Інтегровні комбінації. Приклад: Рівняння Ейлера руху тіла навколо точки закріплення.

Стійкість за Ляпуновим. Асимптотична стійкість. Стійкість лінійних систем. Стійкість лінійної системи зі сталою матрицею. Теорема про стійкість за першим наближенням. Функція Ляпунова. Перша теорема Ляпунова про стійкість. Теорема про асимптотичну стійкість. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість.

ЛОР з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Загальний розв'язок. Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Інтегральні поверхні системи характеристик як розв'язки. Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку та її розв'язання методом характеристик. Рівняння Гопфа.

Рекомендована література

Основна

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. - Київ: Либідь, 2003 (3-є видання Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2010)
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах – Київ: Либідь, 2003
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985.
4. Диференціальні рівняння. Завдання для самостійної роботи./ Упорядн. В.М. Бурим та ін. – К.: ВПЦ Київський університет, 2000.
5. Учебні завдання та методичні вказівки до практичних занять з курсу “Диференціальні рівняння” (Розділ “Диференціальні рівняння першого та вищих порядків”)/ Укладачі Волкова В.О., Парасюк І.О. – К.: КДУ, 1981.
6. Учебні завдання та методичні вказівки до практичних занять з курсу “Диференціальні рівняння” (Розділ “Диференціальні рівняння вищого порядку та системи диференціальних рівнянь”)/ Укладачі Волкова В.О., Парасюк І.О. – К.: КДУ, 1982.
7. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь – Київ: Либідь, 2004.

Додаткова

8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. Наука, 1984.
9. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння – Київ: Либідь, 2004.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958.
11. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967.
12. Іщук В.В., Позур С.В., Капустян О.В., Мельничук О.В. Крайові задачі – К., 2005. – 35с.