

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра інтегральних і диференціальних рівнянь

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Голова вченої ради механіко-математичного факультету
_____ професор Городній М.Ф.
протокол № ____ від ____ _____ 20 р.

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Чернікова О.С.

"Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу"

Робоча навчальна програма дисципліни
для студентів спеціальності
"Механіка"

Методичні рекомендації по вивченню дисципліни " Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу "

“Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу” є базовим нормативним навчальним курсом, що викладається у першому семестрі третього року навчання для спеціальності "Механіка".

Кількість годин в семестрі: лекції – 54, семінарські заняття –18, самостійна робота – 72

Курс оцінюється у 2 кредити за Європейською кредитно-трансферною системою ECTS.

Закінчується іспитом у першому семестрі.

Мета і завдання: ознайомлення з базовими поняттями та основними положеннями теорії інтегральних рівнянь та функціонального аналізу, оволодіння теоретичними та практичними методами дослідження та розв'язування інтегральних рівнянь

Предмет: інтегральні рівняння , методи їх розв'язання та дослідження

Вимоги до знань та вмінь: володіти основами математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь.

Місце в структурно – логічній схемі спеціальності: нормативна навчальна дисципліна " Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу " є базовою з циклу профільної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" спеціальності "Механіка". Матеріал курсу "Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу" використовується при викладанні таких нормативних дисциплін: “Рівняння математичної фізики”, "Варіаційне числення та методи оптимального керування", "Теоретична механіка".

Тематичний план лекцій і практичних занять

№	Назва теми					
		лекцій	практичних занять	самостійна робота	контрольна модульна робота	інші форми контролю

І семестр

Змістовний модуль 1.

1	Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром	8	4	12		
2	Принцип стислих відображень	4	2	6		
3	Лінійні оператори та інтегральні рівняння	16	2	20	2	

Змістовний модуль 2.

4	Операторні рівняння	16	2	18		
5	Рівняння Фредгольма та Вольтерра 1-го роду	10	4	16	2	
Всього годин за I семестр		54	18	72		

Змістовний модуль 1

Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду. Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду.

Тема 1 .Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром.

Лекція 1, 2. Поняття інтегрального рівняння. Класифікація інтегральних рівнянь. Приклади задач, що приводять до інтегральних рівнянь – 4 год.

Лабораторна робота 1. Основні поняття теорії інтегральних рівнянь. Зв'язок між лінійними диференціальними рівняннями та інтегральними рівняннями Вольтерра – 2 год.

Самостійна робота – 6 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Лекція 3, 4. Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром . Теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма - 4 год.

Лабораторна робота 2. Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром– 2 год.

Самостійна робота – 6 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Тема 2 . Принцип стислих відображень

Лекція 5,6. Принцип стислих відображень та його застосування до інтегральних рівнянь—4 год.

Лабораторна робота 3. Застосування принципу стислих відображень до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра 2-го роду – 2 год.

Самостійна робота – 6 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Тема 3 . Лінійні оператори та інтегральні рівняння.

Лекція 7. Лінійні нормовані простори . Банахові простори. Означення, приклади – 2 год.

Лекція 8,9. Лінійні оператори. Неперервність, обмеженість. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів – 4 год.

Лекція 10 . Обернені оператори. Достатня умова існування оператора $(I \pm A)^{-1}$. Резольвентна множина та спектр лінійного оператора - 2 год.

Лекція 11,12.. Рівняння Фредгольма 2-го роду та рівняння Вольтерра 2-го роду . Резольвента, властивості резольвенти— 4 год.

Лабораторна робота 4. Побудова резольвенти для інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду (випадок малих значень $|\lambda|$) та Вольтерра 2-го роду за допомогою ітерованих ядер – 2 год.

Самостійна робота – 14 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Лекція 13. Теореми Фредгольма для рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром – 2 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань, підготовка до контрольної роботи)

Контрольна робота – 2 год.

Контрольні питання

1. Поняття інтегрального рівняння. Класифікація інтегральних рівнянь.
2. Приклади задач, які приводять до інтегральних рівнянь.

3. Зведення до інтегрального рівняння задачі Коші для лінійного диференціального рівняння.
4. Задача Абеля.
5. Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром. Визначник Фредгольма. Характеристичні числа, власні функції.
6. Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром. Спряжене рівняння. Теореми Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
7. Метричні простори, властивості метрики. Приклади метричних просторів.
8. Збіжність в метричному просторі. Збіжність в R^m , $C[a, b]$.
9. Повні метричні простори. Означення, приклади.
10. Відображення стиску. Принцип стислих відображень. Узагальнення теореми Банаха.
11. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання рівняння Фредгольма 2-го роду.
12. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь.
13. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання рівняння Вольтерра 2-го роду.
14. Лінійні нормовані простори. Банахові простори. Приклади.
15. Лінійні оператори. Приклади.
16. Лінійні оператори. Неперервність та обмеженість.
17. Норма лінійного оператора.
18. Простір лінійних операторів $L(E, E_1)$. Збіжність в просторі $L(E, E_1)$. Добуток лінійних неперервних операторів. Оборотні оператори. Оборнений оператор. Властивості.
19. Достатня умова існування оператора $(I \pm A)^{-1}$.
20. Рівняння Фредгольма 2-го роду; ряд Неймана. Повторні ядра. Резольвента. Властивості резольвенти.
21. Теореми Фредгольма для рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром.
22. Резольвентна множина та спектр лінійного оператора.

Змістовний модуль 2

Операторні рівняння. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра 1-го роду.

Тема 4 . Операторні рівняння

Лекція 14. Компактні множини у метричному просторі. Приклади. Теорема Хаусдорфа. Теорема Арцела – 2 год.

Самостійна робота – 2 год. (опрацювання лекційного матеріалу).

Лекція 15, 16. Компактні оператори та їх властивості - 4 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 18. Рівняння Ріса-Шаудера. Гільбертів простір. Спряжений оператор. Симетричні оператори – 2 год.

Самостійна робота – 2 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 19, 20. Симетричні компактні оператори у гільбертовому просторі – 4 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 21. Теорема Гільберта-Шмідта. Розв'язування операторних рівнянь. Резонансний та нерезонансний випадки – 2 год.

Самостійна робота – 2 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 22. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання інтегральних рівнянь – 2 год.

Лабораторна робота 5. Застосування теореми Гільберта-Шмідта – 2 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Тема 5. Рівняння Фредгольма та Вольтерра 1-го роду.

Лекція 23. Поняття про некоректно поставлені задачі. Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду як некоректно поставлена задача – 2 год.

Самостійна робота – 2 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 24. Рівняння Вольтерра 1-го роду – 2 год.

Лабораторна робота 6. Рівняння Вольтерра 1-го роду – 2 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Лекція 25. Рівняння з ядром, що мають слабку особливість. Рівняння Абеля – 2 год.

Лабораторна робота 7. Рівняння з ядром, що мають слабку особливість – 2 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань)

Лекція 26. Поняття про інтегро-диференціальні рівняння – 2 год.

Самостійна робота – 2 год. (опрацювання лекційного матеріалу)

Лекція 27. Чисельні методи розв'язування інтегральних рівнянь – 2 год.

Самостійна робота – 4 год. (опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до контрольної роботи)

Контрольна робота – 2 год.

Контрольні питання

23. Компактні множини в метричному просторі. Приклади. Теорема Хаусдорфа. Теорема Арцела.

24. Компактні оператори. Приклади. Властивості.

25. Банахові простори. Означення, приклади.

26. Гільбертів простір. Означення, приклади.

27. Симетричні оператори в гільбертовому просторі. Властивості симетричних операторів.
28. Процес ортогоналізації системи лінійно незалежних функцій в просторі зі скалярним добутком.
29. Теорема Гільберта-Шмідта.
30. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання операторних рівнянь. Формули Шмідта.
31. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання інтегральних рівнянь з симетричним ядром. Формули Шмідта.
32. Поняття коректно поставленої задачі. Приклади некоректно поставлених задач. Аналіз інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з точки зору коректності постановки задачі.
33. Рівняння Вольтерра 1-го роду. Достатні умови існування та єдиності неперервного розв'язку.
34. Рівняння Вольтерра 1-го роду. Зведення до рівняння Вольтерра 2-го роду.
35. Інтегральні рівняння з ядром, що мають слабку особливість.
36. Наближене розв'язання інтегральних рівнянь.
37. Інтегро-диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до інтегро-диференціальних рівнянь.
38. Інтегро-диференціальні рівняння з інтегральним оператором типа Вольтерра. Лінійні рівняння. Нелінійні рівняння. Питання існування та єдиності розв'язку нелінійного інтегро-диференціального рівняння .

Перелік питань на іспит

Поняття інтегрального рівняння. Класифікація інтегральних рівнянь. Приклади задач, які приводять до інтегральних рівнянь. Задача Абеля. Зведення до інтегрального рівняння задачі Коші для лінійного диференціального рівняння.

Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром. Визначник Фредгольма. Характеристичні числа, власні функції. Спряжене рівняння. Теореми Фредгольма . Альтернатива Фредгольма.

Метричні простори. Збіжність в метричному просторі. Повні метричні простори.

Принцип стислих відображень. Теорема Банаха. Узагальнення теореми Банаха. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання рівняння Фредгольма 2-го роду та рівняння Вольтерра 2-го роду . Застосування принципу стислих відображень до розв'язання деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь.

Лінійні нормовані простори. Банахові простори. Лінійні оператори. Неперервність та обмеженість. Норма лінійного оператора.

Простір лінійних обмежених операторів. Збіжність в просторі $L(E, E_1)$.

Добуток лінійних неперервних операторів. Обернений оператор. Властивості оберненого оператора. Достатня умова існування оператора $(I \pm A)^{-1}$.

Рівняння Фредгольма 2-го роду . Ряд Неймана. Повторні ядра. Резольвента. Властивості резольвенти. Рівняння Вольтерра 2-го роду. Побудова резольвенти.

Теореми Фредгольма для рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром.

Теорема про оборотність оператора, слабо збуреного відносно оборотного оператора A . Застосування теореми.

Резольвентна множина та спектр лінійного оператора.

Компактні множини в метричному просторі. Приклади. Теорема Хаусдорфа . Теорема Арцела.

Компактні оператори. Властивості. Некомпактність одиничного оператора у нескінченновимірному банаховому просторі.

Простори зі скалярним добутком. Гільбертів простір. Симетричні оператори в гільбертовому просторі. Компактні симетричні оператори в гільбертовому просторі. Властивості .

Процес ортогоналізації системи лінійно незалежних елементів у лінійному просторі зі скалярним добутком.

Теорема Гільберта-Шмідта. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання операторних рівнянь. Формули Шмідта. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання інтегральних рівнянь .

Поняття коректно поставленої задачі. Аналіз інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з точки зору коректності постановки задачі.

Рівняння Вольтерра 1-го роду. Зведення до рівняння Вольтерра 2-го роду.

Інтегральні рівняння Вольтерра з ядром $K(t,s) = \frac{1}{(t-s)^\alpha}, 0 < \alpha < 1$.

Рівняння Абеля.

Рекомендована література

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.- М.: МГУ, 1989.
2. Краснов М.П. Интегральные уравнения.-М.: Наука, 1975.
3. Михлин С.Т. Лекции по линейным дифференциальным уравнениям.- М.:Наука, 1959.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: Наука, 1981.
5. Краснов М.П. Интегральные уравнения: задачи и упражнения.-М.:Наука, 1976.
6. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь.- Київ:Техніка, 1989.