

**Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка**

**механіко-математичний факультет**

*Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь*

**Укладач:** асистент *Задоянчук Н.В.*

*ДВВБ “Нелінійний аналіз та його економічні застосування”*

-----  
*назва дисципліни*

**РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**

для студентів спеціальності:

6.040201 “статистика”

-----  
*шифр і назва напрямку (спеціальності)*

**Затверджено**

на засіданні кафедри

Протокол № \_\_\_\_

від

»\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012\_р.

Зав. кафедри

-----  
*Підпис                      Прізвище, ініціали*

Декан факультету/

Директор інституту

-----  
*Прізвище, ініціали*

**КИЇВ – 2012**

Робоча навчальна програма з дисципліни *ДВВБ*  
“Нелінійний аналіз та його економічні застосування”

*Назва навчальної дисципліни*

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук, асистент Задоянчук Н.В.

**Лектор:** Кандидат фіз.-мат. наук, асистент Задоянчук Н.В.

*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали*

**Викладач(і):**

\_\_\_\_\_  
*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів),  
який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття*

**Погоджено**  
з науково-методичною комісією  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2012р.

\_\_\_\_\_  
*Підпис голови НМК факультету/ інституту*

## Передмова

Лекційний курс “Нелінійний аналіз та його економічні застосування” є дисципліною циклу професійної та практичної підготовки студентів спеціальності «статистика», які спеціалізуються по кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь. Ця дисципліна викладається на 4 курсі у 2- семестрі в загальному обсязі 69 години (2,5 кредити) з них: **лекцій — 48 год., самостійної роботи — 10 год, модульні контрольні роботи 3 год.** Формою підсумкового контролю є **залік.**

### **Мета і завдання навчальної дисципліни:**

Ознайомлення з сучасним математичним апаратом дослідження процесів сучасної економіки, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами теорії вибору, теорії оптимізації економічних процесів, теорії ігор.

### **Предмет навчальної дисципліни:**

Задача економічної рівноваги, моделі прийняття рішення, замкнені опуклі процеси, мінімаксні задачі, множиннозначні відображення.

### **Вимоги до знань та вмінь**

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно мати тверді знання з нормативного курсу «Диференціальні рівняння», «Варіаційне числення», володіти теоретичним матеріалом та практичними вміннями, математичного аналізу (зокрема, матеріалом розділів «Границі», «Метричні простори», «Визначений інтеграл», «Невизначений інтеграл», «Граничний перехід під знаком інтеграла», функціонального аналізу (зокрема, матеріалом розділів «Банахові простори», «Гілбертові простори», «Неперервні функціонали та оператори»), теорії міри та інтегралу (зокрема, матеріалом розділів «Інтеграл Лебега», «Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега», «Міра та її властивості», «Вимірні функції та вимірні множини»).

### **Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки спеціалістів статистики.**

Дисципліна “Нелінійний аналіз та його економічні застосування” є складовою циклу професійної та практичної підготовки студентів спеціальності «статистика», які спеціалізуються по кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь. Набуті студентами знання використовуються при виконанні дипломних робіт з подальшим застосуванням до роботи з проблемами оптимізації та рівноваги в економіці.

### **Система поточного, модульного та підсумкового контролю**

Навчальна дисципліна “Нелінійний аналіз та його економічні застосування” оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 2 змістових модулів.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною

шкалою .

### **Контроль знань.**

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Оцінювання за формами контролю:

**Поточний** –

- 2 модульні контрольні роботи – по 30 балів кожна.

За результатами семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною шкалою, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен із двох модулів та оцінки за залік за наступною формулою.

	<b>Змістовий модуль 1 )</b>	<b>Змістовий модуль 2</b>	<b>Разом (підсумкова оцінка)</b>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100
Оцінка (бали)	30	30	100

**При цьому, кількість балів** відповідає оцінці:

**1-34** – «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;

**35-59** – «незадовільно» з можливістю повторного складання;

**60-64** – «задовільно» («достатньо»);

**65-74** – «задовільно»;

**75 - 84** – «добре»;

**85 - 89** – «добре» («*дуже добре*»);

**90 - 100** – «відмінно».

### **Шкала відповідності<sup>1</sup>**

За 100-бальною шкалою	Оцінка іспиту за національною шкалою		Оцінка заліку за національною шкалою
<b>90 – 100</b>	<b>5</b>	<b>відмінно</b>	
<b>85 – 89</b>	<b>4</b>	<b>добре</b>	
<b>75 – 84</b>			
<b>65 – 74</b>	<b>3</b>	<b>задовільно</b>	
<b>60 – 64</b>			
<b>35 – 59</b>	<b>2</b>	<b>незадовільно</b>	
<b>1 – 34</b>			

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ**  
**2 семестр**

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
<b>Змістовий модуль 1</b>					
<b>Задачі мінімізації: загальні теореми</b>					
1	Опуклі і спряжені функції та опуклі задачі мінімізації	12		2	
2	Субдиференціали опуклих функцій	6		2	
3	Маргінальні властивості розв'язків опуклих задач мінімізації	6		1	
Модульна контрольна робота					2
<b>Змістовий модуль 2</b>					
<b>Фундаментальні засади теорії ігор та теорії економічної рівноваги</b>					
4	Двоосібні ігри: фундаментальні засади та приклади	8			
5	Двоосібні ігри: теореми Фон Неймана та Кі Фаня	10		3	
6	Базові принципи теорії економічної рівноваги	6		2	
Модульна контрольна робота					1
	<b>Всього</b>	<b>48</b>		<b>10</b>	<b>3</b>

Загальний обсяг **69** год., в тому числі:

Лекцій - **48** год.

Семінари/лабораторні, практичні - \_\_\_\_\_ год.

Самостійна робота - **10** год.

## ***Змістовий модуль 1. Задачі мінімізації: загальні теореми***

### ***Тема 1. Опуклі і спряжені функції та опуклі задачі мінімізації.***

***Лекція 1.*** Напівнеперервні знизу та напівкомпактні знизу функції.

***Лекція 2.*** Апроксимаційна мінімізація напівнеперервних знизу функцій на повному просторі.

***Лекція 3.*** Теореми про нерухому точку.

***Лекція 4.*** Приклади опуклих функцій та неперервні опуклі функції.

***Лекція 5.*** Характеризація опуклих напівнеперервних знизу функцій. Теорема Фенхеля.

***Лекція 6.*** Властивості спряжених функцій. Опорні функції

***Завдання для самостійної роботи:*** Опрацювати [4, Глава 2] (2 год.).

### ***Тема 2. Субдиференціали опуклих функцій.***

***Лекція 7.*** Субдиференційовність опуклих неперервних функцій.

***Лекція 8.*** Субдиференційовність опуклих напівнеперервних знизу функцій.

***Лекція 9.*** Субдиференціальне числення. Дотичний та нормальний конуси.

***Завдання для самостійної роботи:*** Опрацювати [2, Глава 1] (2 год.).

### ***Тема 3. Маргінальні властивості розв'язків опуклих задач мінімізації.***

***Лекція 10.*** Правило Ферма. Задачі мінімізації з обмеженнями.

***Лекція 11.*** Принцип децентралізації ціни.

***Лекція 12.*** Дотичний та нормальний конуси до підмножини.

***Завдання для самостійної роботи:*** Опрацювати [3, глава 3, 4] (1 год.).

### ***Контрольні запитання та завдання***

1. Що таке надграфік?
2. Дати означення напівнеперервної знизу функції.
3. Дати означення опуклої функції.
4. Дати означення напівкомпактної знизу функції.

5. Сформулювати теорему найкращого наближення.
6. Що таке опорна функція?
7. Дати означення спряженої функції.
8. Сформулювати теорему Фенхеля.
9. Дати означення субдиференціалу опуклої функції.
10. Дати означення дотичного та нормального конусу.
11. Сформулювати задачу мінімізації з обмеженнями.
12. Дати означення дотичного та нормального конуса до підмножини.

### **Зразок типової модульної контрольної роботи 1 змістового модуля**

1. Нехай  $f: R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$  - строга функція, що задовольняє умову  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . а) Показати, що  $f$  - напівкомпактна знизу; б) довести, що це частковий випадок для функцій, що задовольняють  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$ .
2. Нехай  $X$  - гільбертів простір з нормою  $\|\cdot\|$  і  $X^*$  - спряжений до нього простір з нормою  $\|\cdot\|_*$ . Показати, що  $\left(\frac{1}{\alpha} \|\cdot\|\right)^*(p) = \frac{1}{\alpha^* \|p\|_*^{\alpha^*}}$ , де  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$ .
3. Показати, що для всіх  $x \in K$  ми маємо  $T_K(x) \subset T_K^b(x)$ . У випадку, коли  $A \in L(X, Y)$ , показати, що  $AT_K^b(x) \subset T_{A(K)}(Ax)$ .

## **Змістовий модуль 2. Фундаментальні засади теорії ігор та теорії економічної рівноваги**

### **Тема 4. Двоосібні ігри: фундаментальні засади та приклади**

**Лекція 13.** Правила вибору та послідовні пари стратегій.

**Лекція 14.** Ігри в нормальній (стратегічній) формі.

**Лекція 15.** Оптимальність за Парето. Консервативні стратегії.

**Лекція 16.** Деякі скінченні ігри. Дуополія Курно.

## **Тема 5. Двоосібні ігри: теореми Фон Неймана та Кі Фаня**

**Лекція 17.** Існування консервативних стратегій.

**Лекція 18.** Неперервне розбиття одиниці.

**Лекція 19.** Правила вибору оптимального рішення.

**Лекція 20.** Хемінеперервні зверху багатозначні відображення.

**Лекція 21.** Варіаційні нерівності. Теорема Лере-Шаудера.

**Завдання для самостійної роботи:** Опрацювати [4, Глава 3] (3 год.).

## **Тема 6. Базові принципи теорії економічної рівноваги**

**Лекція 22.** Механізм Вальраса.

**Лекція 23.** Механізм для децентралізації ціни.

**Лекція 24.** Модель росту Фон Неймана.

**Завдання для самостійної роботи:** Опрацювати [1, Глава 12] (2 год.).

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Дати означення правила вибору.
2. Дати означення двоосібної гри в нормальній формі.
3. Дати означення оптимальності за Парето.
4. Сформулювати твердження про існування консервативної стратегії.
5. Сформулювати теорему Фон Неймана.
6. Сформулювати теорему про нерівність Кі Фаня.
7. Дати означення хемінеперервного зверху відображення.
8. Сформулювати фундаментальну теорему про існування нулів багатозначного відображення.
9. Дати означення вальрасівської рівноважної ціни.
10. Сформулювати теорему Фон Неймана.

### **Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля**



Нехай  $L$  - множина споживання і  $M$  - множина ресурсів така, що  $M = M_0 - R_+^l$ , де  $M_0$  - компакт. а) Показати, що відображення  $p \rightarrow r(p) = \sup_{y \in M} \langle p, y \rangle$  неперервне на  $R_+^l$ . Довести, що графік бюджетного багатозначного відображення  $(p, x) \rightarrow B(p, r)$ , що визначається наступним чином  $B(p, r) := \{x \in L \mid \langle p, x \rangle \leq r(p)\}$  - замкнений. Також показати, що якщо

$$L \text{ - компакт (1),}$$

то  $B$  - напівнеперервне зверху. б) Нехай

$$L \text{ - опукла,}$$

$$\forall p \in R_+^l, \exists x \in L: \langle p, x \rangle < r(p). \quad (2)$$

Показати, що багатозначне відображення  $(p, x) \rightarrow B(p, r)$  - напівнеперервне зверху. в) Розглянемо неперервну функцію  $f$ , що діє з  $L$  в  $R$  і побудуємо наступну багатозначну функцію попиту  $D(p, r) := \{\bar{x} \in B(p, r) \mid f(\bar{x}) = \inf_{x \in B(p, r)} f(x)\}$ .

Довести, що ця функція є напівнеперервною зверху, якщо виконуються умови (1) і (2).

### **Перелік питань на залік**

1. Над графік функції.
2. Напівнеперервні знизу функції.
3. Опуклі функції.
4. Напівкомпактні знизу функції.
5. Теорема найкращого наближення.
6. Спряжені функції і їх властивості.
7. Теорема фенхеля.
8. Субдиференційовність опуклих неперервних функцій.
9. Субдиференційовність опуклих напівнеперервних знизу функцій.
10. Дотичний та нормальний конус.
11. Задача мінімізації з обмеженнями.
12. Правило Ферма для задачі мінімізації з обмеженнями.
13. Двоосібна гра в нормальній (стратегічній) формі.
14. Правила вибору.
15. Оптимальність Парето в двоосібних іграх.
16. Існування консервативної стратегії.

17. Теорема Фон Неймана.
18. Теорема про нерівність Кі Фаня.
19. Хемінеперервні зверху відображення.
20. Фундаментальна теорема про існування нулів багатозначного відображення.
21. Вальрасівська рівноважна ціна.
22. Теорема Фон Неймана.
23. Дотичний та нормальний конуси до підмножини.
24. Механізм Вальраса і механізм для децентралізації ціни.

## **Рекомендована література**

### **Основна**

1. J.-P.Aubin. Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis (Second Edition). Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 417 p.
2. М.З. Згуровский, П.О. Касьянов, В.С. Мельник. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. К.: Наукова думка, 2008. – 459 с.

### **Додаткова**

3. J.-P.Aubin, H. Frankowska. Set-Valued Analysis. Birkhauser Boston, 1990. – 459 p.
4. М.З. Згуровский, В.С. Мельник, А.Н. Новиков. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. К.: Наукова думка, 2004. – 588 с.

1. Задачі мінімізації: загальні теореми.  
Напівнеперервні знизу і напівкомпактні знизу функції.  
Апроксимаційна мінімізація напівнеперервних знизу функцій на повному просторі.  
Теореми про нерухому точку.
2. Опуклі функції і апроксимації.  
Основні означення та допоміжні результати.  
Опуклі неперервні функції і теорема апроксимації.
3. Спряжені функції і опуклі задачі мінімізації.  
Характеризація опуклих напівнеперервних знизу функцій і теорема Фенхеля.  
Властивості спряжених функцій.
4. Субдиференціали опуклих функцій.  
Субдиференційовність опуклих неперервних функцій.  
Субдиференційовність опуклих напівнеперервних знизу функцій.
5. Маргінальні властивості розв'язків опуклих задач мінімізації.  
Задачі мінімізації з обмеженнями.  
Принцип децентралізації ціни.
6. Узагальнені градієнти локально Ліпшицевих функцій.  
Нормальний і дотичний конуси до підмножини.  
Правило Ферма для задач мінімізації з обмеженнями.
7. Двоосібні ігри. Фундаментальні засади і приклади.  
Правила прийняття рішень і послідовні пари стратегій.  
Ігри в нормальній (стратегічній) формі.
8. Двоосібні ігри з нульовою сумою: теореми Фон Неймана і Кі Фаня.  
Існування консервативних стратегій.  
Правила прийняття оптимального рішення.
9. Розв'язки нелінійних рівнянь і включень.
  - 9.1. Хемінеперервні зверху багатозначні відображення.
  - 9.2. Фундаментальна теорема про існування нулів багатозначного відображення.
10. Вступ до теорії економічної рівноваги.
  - 10.1. Механізм Вальраса і механізм децентралізації ціни.
  - 10.2. Модель росту Фон Неймана.

1. Задачи минимизации: общие теоремы.  
Полунепрерывные снизу и полукомпактные снизу функции.  
Приближенная оптимизация полунепрерывных снизу функций на полных пространствах.  
Теоремы о неподвижной точке.
2. Выпуклые функции и приближения.  
Основные определения и вспомогательные результаты.  
Выпуклые непрерывные функции и теорема о приближении.
3. Сопряженные функции и выпуклые задачи минимизации.  
Характеризация выпуклых полунепрерывных снизу функций и теорема Фенхеля.  
Свойства сопряженных функций.
4. Субдифференциалы выпуклых функций.  
Субдифференцируемость выпуклых непрерывных функций.  
Субдифференцируемость выпуклых полунепрерывных снизу функций.
5. Маргинальные свойства решений выпуклых задач минимизации.  
Задачи минимизации с ограничениями.  
Принцип децентрализации цены.
6. Обобщенные градиенты локально Липшицевых функций.  
Нормальный и касательный конусы к подмножеству.  
Правило Ферма для задачи минимизации с ограничениями.
7. Игры с двумя участниками. Фундаментальные понятия и примеры.  
Правила принятия решения и последовательные пары стратегий.  
Игры в нормальной (стратегической) форме.
8. Игры с двумя участниками: теоремы Фон Неймана и Ки Фаня.  
Существование консервативных стратегий.  
Правила принятия оптимального решения.
9. Решения нелинейных уравнений и включений.
  - 9.1. Хеминепрерывные сверху многозначные отображения.
  - 9.2. Фундаментальная теорема о существовании нулей многозначного отображения.
10. Введение к теории экономического равновесия.
  - 10.1. Механизм Вальраса и механизм децентрализации цены.
  - 10.2. Модель роста Фон Неймана.

1. Minimisation Problems: General Theorems.  
     Lower Semi-continuous and Lower Semi-compact Functions.  
     Approximate Minimisation of Lower Semi-continuous Functions on a Complete Space.  
     Fixed-point Theorems.
2. Convex Functions and Proximation.  
     Main Definitions and Auxiliary Results.  
     Continuous Convex Functions and Proximation Theorem.
3. Conjugate Functions and Convex Minimisation problems.  
     Characterisation of Convex Lower Semi-continuous Functions and Fenchel's Theorem.  
     Properties of Conjugate Functions.
4. Subdifferentials of Convex Functions.  
     Subdifferentiability of Convex Continuous Functions.  
     Subdifferentiability of Convex Lower Semi-continuous Functions.
5. Marginal Properties of Solutions of Convex Minimisation Problems.  
     Minimisation Problems with Constrains.  
     Principle of Price Decentralisation.
6. Generalized Gradients of Locally Lipschitz Functions.  
     Normal and Tangent Cones to a Subset.  
     Fermat's Rule for Minimisation Problems with Constrains.
7. Two-person Games. Fundamental Concepts and Examples.  
     Decision Rules and Consistent Pairs of Strategies.  
     Games in Normal (Strategic) Form.
8. Two-person Zero-sum Games: Theorems of Von Neumann and Ky Fan.  
     Existence of Conservative Strategies.  
     Optimal Decision Rules.
9. Solutions of Nonlinear Equations and Inclusions.  
     9.1. Upper Hemi-continuous Set-valued Maps.  
     9.2. The Fundamental Theorem for the Existence of Zeros of a Set-valued Map.
10. Introduction to the Theory of Economic Equilibrium.  
     10.1. The Walrasian Mechanism and Mechanism for Price Decentralisation.  
     10.2. The Von Neumann Growth Model.

## References

J.-P.Aubin. Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis (Second Edition). Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 417 p.