

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**механіко-математичний факультет**

*Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь*

*Укладач: асистент Сукретна А.В.*

*ДВВБ “Оптимальне керування лінійними системами та його застосування”*

-----  
*назва дисципліни*

**РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**

для студентів спеціальності:

“статистика”

-----  
*шифр і назва напрямку (спеціальності)*

**Затверджено**

на засіданні кафедри

*Протокол № \_\_\_\_*

*від “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009р.*

*Зав. кафедри*

\_\_\_\_\_ Перестюк М.О.

*Підпис*

*Прізвище, ініціали*

Декан факультету/

Ди-

ректор інституту

\_\_\_\_\_ Городній М.Ф.

*Підпис*

*Прізвище, ініціали*

**КИЇВ – 2009**

Робоча навчальна програма з дисципліни ДВВБ  
“Оптимальне керування лінійними системами та його застосування”  
*Назва навчальної дисципліни*

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук Сукретна А.В.

**Лектор:** кандидат фіз.-мат. наук Сукретна А.В.  
*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали*

**Викладач(і):**

\_\_\_\_\_  
*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів),  
який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття*

**Погоджено**  
з науково-методичною комісією  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2009р.

\_\_\_\_\_  
*Підпис голови НМК факультету/ інституту*

## Передмова

Лекційний курс “Оптимальне керування лінійними системами та його застосування” є дисципліною вільного вибору студента за блоками циклу професійної та практичної підготовки бакалаврів статистики, які спеціалізуються по кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь (математична економіка). Ця дисципліна викладається на *IV курсі у 8-му семестрі* в обсязі *72 години (2 кредити)*, з них: *лекцій – 32 год., самостійної роботи – 40 год.*

### **Мета і завдання навчальної дисципліни:**

Ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії оптимального керування лінійними системами, розгляд типових задач теорії, які виникають у різних галузях людської діяльності, оволодіння базовими методами розв’язання основних класів задач оптимального керування лінійними системами.

### **Предмет навчальної дисципліни:**

Системи звичайних диференціальних рівнянь; задача оптимального керування для лінійних систем; програмне оптимальне керування; оптимальний синтез; задача керуваності.

### **Вимоги до знань та вмінь**

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно мати тверді знання з нормативних курсів “Диференціальні рівняння” та “Варіаційне числення та методи оптимізації”, володіти теоретичним матеріалом та практичними вміннями з лінійної алгебри (зокрема, матеріалом розділів “Лінійні простори”, “Лінійні оператори”, “Жорданова нормальна форма”, “Квадратичні форми”), функціонального аналізу (зокрема, матеріалом розділів “Гільбертові простори”, “Додатні та додатно визначені оператори”).

### **Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра математики.**

Дисципліна “Оптимальне керування лінійними системами та його застосування” є складовою циклу професійної та практичної підготовки бакалаврів статистики, які спеціалізуються по кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь. Її викладанню передують вивчення таких математичних дисциплін, як “Лінійна алгебра”, “Диференціальні рівняння”, “Функціональний аналіз”, “Варіаційне числення та методи оптимізації”. У подальшому матеріал курсу “Оптимальне керування лінійними системами та його застосування” використовується при викладанні інших дисциплін вільного вибору студента, а набуті студентами знання — при написанні курсових та кваліфікаційних робіт.

### **Система поточного, модульного та підсумкового контролю**

Навчальна дисципліна “Оптимальне керування лінійними системами та його застосування” оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 2 змістовних модулів.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою.

### **Контроль знань.**

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Оцінювання за формами контролю:

**Поточний –**

- 2 модульні контрольні роботи – 60 балів

За результатами семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною шкалою, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен із двох модулів у семестрі та оцінки підсумкового контролю за наступною формулою.

	<i>Змістовий модуль 1</i>	<i>Змістовий модуль 2</i>	<i>Іспит, залік, інша форма звітності</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	40% $k_3=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100
Оцінка (бали)	30	30	40	100

**При цьому, кількість балів** відповідає оцінці:

**1-34** – «незадовільно» з **обов'язковим повторним вивченням дисципліни**;

**35-59** – «незадовільно» з **можливістю повторного складання**;

**60-64** – «задовільно» («**достатньо**»);

**65-74** – «задовільно»;

**75 - 84** – «добре»;

**85 - 89** – «добре» («**дуже добре**»);

**90 - 100** – «відмінно».

**Шкала відповідності<sup>1</sup>**

За 100-бальною шкалою	Оцінка іспиту за національною шкалою		Оцінка заліку за національною шкалою
<b>90 – 100</b>	<b>5</b>	<b>відмінно</b>	
<b>85 – 89</b>	<b>4</b>	<b>добре</b>	
<b>75 – 84</b>			
<b>65 – 74</b>	<b>3</b>	<b>задовільно</b>	
<b>60 – 64</b>			
<b>35 – 59</b>	<b>2</b>	<b>незадовільно</b>	
<b>1 – 34</b>			

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ  
І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ**

**8 семестр**

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
<b>Змістовий модуль 1</b>					
<b>Керування з мінімальною енергією</b>					
1	Гільбертові простори та додатні оператори	4		4	
2	Геометрична задача про вектор мінімальної довжини	2		2	
3	Керування з мінімальною енергією та пов'язані з ним задачі	10		14	
Модульна контрольна робота					
<b>Змістовий модуль 2</b>					
<b>Керування з мінімальною силою</b>					
4	Керування лінійними системами з лінійним критерієм оптимальності	10		12	
5	Керування з мінімальною силою та пов'язані з ним задачі	6		8	
Модульна контрольна робота					
	<b>ВСЬОГО</b>	<b>32</b>		<b>40</b>	

Загальний обсяг – 72 год., в тому числі:

Лекцій – 32 год.

Семінари/лабораторні, практичні – 0 год.

Самостійна робота – 40 год.

## **Змістовий модуль 1. Задачі оптимального керування з квадратичним критерієм якості**

### **Тема 1. Гільбертові простори та додатні оператори**

*Лекція 1.* Гільбертові простори: основні поняття, ортонормований базис, лінійні функціонали в гільбертовому просторі. Додатні та додатно визначені оператори.

**Завдання для самостійної роботи 1** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібрати приклади [1, глава 1, § 1–2].

*Лекція 2.* Приклади гільбертових просторів. Операторні рівняння в гільбертовому просторі.

**Завдання для самостійної роботи 2** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібрати приклади [1, глава 1, § 3–4].

### **Тема 2. Геометрична задача про вектор мінімальної довжини**

*Лекція 3.* Геометрична задача про вектор мінімальної довжини.

**Завдання для самостійної роботи 3** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 1].

### **Тема 3. Керування з мінімальною енергією та пов'язані з ним задачі**

*Лекція 4.* Керування з мінімальною енергією в лінійній системі: теоретичні відомості.

**Завдання для самостійної роботи 4** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [1, глава 2, § 2].

*Лекція 5.* Керування з мінімальною енергією в лінійній системі: приклади розв'язання задач, які виникають на практиці.

**Завдання для самостійної роботи 5** (2 год.) Розібратися з прикладами [1, глава 2, § 2].

*Лекція 6.* Узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією: алгебраїчне та диференціальне узагальнення.

**Завдання для самостійної роботи 6** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 3, п. 1–2].

**Лекція 7.** Узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією: інтегральне узагальнення; узагальнення на випадок, коли критерій оптимальності визначається довільним додатним оператором.

**Завдання для самостійної роботи 7** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 3, п. 3–4].

**Лекція 8.** Імпульсне керування лінійною неперервною системою.

**Завдання для самостійної роботи 8** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 4].

**Завдання для самостійної роботи 9** (2 год.) Підготувати відповіді на питання [1, с. 24, с. 113 (1–3)].

**Завдання для самостійної роботи 10** (2 год.) Підготовка до модульної контрольної роботи.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Який лінійний простір називається гільбертовим?
2. Що називається скалярним добутком елементів гільбертового простору і які його основні властивості?
3. Який елемент гільбертового простору називається ортогональним до множини  $M$  цього простору?
4. Сформулюйте та доведіть теорему Леві.
5. Дайте визначення ортонормованого базису гільбертового простору.
6. Що називається лінійним функціоналом?
7. Сформулюйте теореми Хана–Банана та Рісса про лінійні функціонали.
8. Дайте означення додатного та додатно визначеного оператора.
9. Дайте визначення поняттю вкладення лінійного нормованого простору.
10. Сформулюйте та доведіть теореми про розв'язність операторних рівнянь в гільбертовому просторі.
11. Геометрична задача про вектор мінімальної довжини.
12. Що називається керуванням з мінімальною енергією? За якими формулами воно визначається?
13. Наведіть приклади різних узагальнень задачі про керування з мінімальною енергією.
14. Метод визначення оптимального керування для алгебраїчного узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.

15. Метод визначення оптимального керування для диференціального узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.
16. Метод визначення оптимального керування для інтегрального узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.
17. Сформулюйте та доведіть теореми про розв'язання задачі оптимізації при імпульсному керуванні.

### Зразок типової модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля

1. Дайте означення додатного та додатно визначеного оператора. (5 балів)
2. Що називається керуванням з мінімальною енергією? За якими формулами воно визначається? (10 балів)
3. Сформулюйте та доведіть теореми про розв'язання задачі оптимізації при імпульсному керуванні. (20 балів)

4. Нехай задані вектори  $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $h_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Потрібно знайти вектор  $h$  мінімальної довжини такий, аби  $(h_1, h) = (h_2, h) = 4$ ;  $(h_3, h) = (h_4, h) = -1$ . (10 балів)

5. Розглядається керована хімічна реакція в припущенні, що реагент вводиться до реактору з постійною швидкістю протягом заданого інтервалу часу  $0 \leq t \leq T$ . Процес описується рівнянням  $\dot{x} = \alpha x + \beta u$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  – відомі сталі;  $x$  – величина, що характеризує кількість вихідного продукту;  $u$  – концентрація деякої складової реагенту. Функціонал  $I = \int_0^T x^2(t) dt$  береться в якості міри виміру  $x$  у виході кінцевого продукту. Витрати на підтримку відповідної концентрації  $u = u(t)$  реагенту пропорційні  $u^2$ . Тоді загальна сума витрат, які пов'язані з керуванням  $u(t)$  на інтервалі  $0 \leq t \leq T$ , визначається виразом  $c(u) = \int_0^T [a^2 x^2(t) + u^2(t)] dt$ , тут  $a^2$  – масштабний множник. Задача оптимального керування полягає в наступному. При заданих початковій і кінцевій умові  $x(0) = 0$ ,  $x(T) = 1$ . Потрібно знайти керування  $u = u(t)$  на інтервалі  $[0, T]$  таке, щоб функція, яка визначається цим керуванням  $x = x(t)$  разом з  $u = u(t)$  доставляє мінімум функціонала. (15 балів)



## **Змістовий модуль 2. Задачі оптимального керування з лінійним критерієм оптимальності**

### **Тема 4. Керування лінійними системами з лінійним критерієм оптимальності**

**Лекція 9.** Геометрична задача мінімізації проекції вектора, що має обмежену довжину. Мінімізація лінійного функціонала при обмеженні на енергію керування.

**Завдання для самостійної роботи 11** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 5].

**Лекція 10.** Узагальнення задач з лінійним критерієм оптимальності.

**Завдання для самостійної роботи 12** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 6].

**Лекція 11.** Задача про оптимальну швидкодію з обмеженням на енергію керування та її узагальнення.

**Завдання для самостійної роботи 13** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 7, п. 1].

**Лекція 12.** Оптимальна швидкодія при імпульсних керуваннях.

**Завдання для самостійної роботи 14** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 7, п. 2].

**Лекція 13.** Керування з мінімальною енергією при рухомих кінцях.

**Завдання для самостійної роботи 15** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами [1, глава 2, § 8].

### **Тема 5. Керування з мінімальною силою та пов'язані з ним задачі**

**Лекція 14.** Керування з мінімальною силою в лінійній системі: постановка задачі та обговорення методів її розв'язання.

**Завдання для самостійної роботи 16** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [1, глава 3, § 7, п. 1–2].

**Лекція 15.** Керування з мінімальною силою в лінійній системі: приклади розв'язання задач.

**Завдання для самостійної роботи 17** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [1, глава 3, § 7, п. 3].

**Лекція 16.** Лінійні системи з імпульсним керуванням.

**Завдання для самостійної роботи 18** (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал і розібратися з прикладами[1, глава 3, § 2].

**Завдання для самостійної роботи 19** (2 год.) Підготувати відповіді на питання [1, с. 113 (4–5), с. 161 – 162 (1–3)].

**Завдання для самостійної роботи 20** (2 год.) Підготовка до модульної контрольної роботи.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Геометрична задача мінімізації проекції вектора, що має задану довжину.
2. Виведіть достатні умови розв'язаності задачі мінімізації лінійного функціонала з заданими обмеженнями на енергію керування.
3. Теореми про розв'язність для узагальнення задач з лінійним критерієм оптимальності.
4. Сформулюйте задачу про оптимальну швидкодію з обмеженнями на енергію керування та окресліть шлях її розв'язання.
5. Оптимальна швидкодія при імпульсних керуваннях.
6. Сформулюйте та доведіть теорему про керування з мінімальною енергією при рухомих кінцях.
7. Сформулюйте задачу про керування з мінімальною силою та вкажіть умови її розв'язності.
8. До якої задачі зводиться задача про керування з мінімальною силою в лінійній системі?
9. Вкажіть особливості розв'язання задачі про керування з мінімальною силою для лінійної системи з імпульсним керуванням.

### **Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля**

1. Виведіть достатні умови розв'язності задачі мінімізації лінійного функціонала з заданими обмеженнями на енергію керування. (10 балів)
2. Теореми про розв'язність для узагальнення задач з лінійним критерієм оптимальності. (15 балів)
3. До якої задачі зводиться задача про керування з мінімальною силою в лінійній

системі? (5 балів)

4. Нехай в  $R^3$  задані два вектори  $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Потрібно знайти вектор

$x \in R^3$  такий, аби  $(y_1, x) = 1$ ;  $\|x\| \leq 2$  і величина  $I = (y_0, x)$  приймала найменше можливе значення при  $x = x$  (10 балів)

5. Розв'язати задачу про оптимальну швидкодію для системи  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2; \end{cases}$  з поча-

тковими умовами  $x_1(t_0) = a$ ,  $x_2(t_0) = b$ ,  $t_0 \geq 0$ . Систему потрібно перевести в стан  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  за найкоротший час з обмеженням на допустимі керуван-

ня  $\int_0^T [(t+1)u_1^2(t) + 2u_1(t)u_2(t) + (t+2)u_2^2(t)] dt \leq 3$ .

### Перелік питань для підсумкового контролю

1. Який лінійний простір називається гільбертовим?
2. Що називається скалярним добутком елементів гільбертового простору і які його основні властивості?
3. Який елемент гільбертового простору називається ортогональним до множини  $M$  цього простору?
4. Сформулюйте та доведіть теорему Леві.
5. Дайте визначення ортонормованого базису гільбертового простору.
6. Що називається лінійним функціоналом?
7. Сформулюйте теореми Хана–Банана та Рісса про лінійні функціонали.
8. Дайте означення додатного та додатно визначеного оператора.
9. Дайте визначення поняттю вкладення лінійного нормованого простору.
10. Сформулюйте та доведіть теореми про розв'язність операторних рівнянь в гільбертовому просторі.
11. Геометрична задача про вектор мінімальної довжини.
12. Що називається керуванням з мінімальною енергією? За якими формулами воно визначається?

13. Наведіть приклади різних узагальнень задачі про керування з мінімальною енергією.
14. Метод визначення оптимального керування для алгебраїчного узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.
15. Метод визначення оптимального керування для диференціального узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.
16. Метод визначення оптимального керування для інтегрального узагальнення задачі про керування з мінімальною енергією.
17. Сформулюйте та доведіть теореми про розв'язання задачі оптимізації при імпульсному керуванні.
18. Геометрична задача мінімізації проекції вектора, що має задану довжину.
19. Виведіть достатні умови розв'язаності задачі мінімізації лінійного функціонала з заданими обмеженням на енергію керування.
20. Теореми про розв'язність для узагальнення задач з лінійним критерієм оптимальності.
21. Сформулюйте задачу про оптимальну швидкодію з обмеженнями на енергію керування та окресліть шлях її розв'язання.
22. Оптимальна швидкодія при імпульсних керуваннях.
23. Сформулюйте та доведіть теорему про керування з мінімальною енергією при рухомих кінцях.
24. Сформулюйте задачу про керування з мінімальною силою та вкажіть умови її розв'язності.
25. До якої задачі зводиться задача про керування з мінімальною силою в лінійній системі?
26. Вкажіть особливості розв'язання задачі про керування з мінімальною силою для лінійної системи з імпульсним керуванням.

### **Рекомендована література**

1. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами. – К.: Выща школа, 1988.
2. Бублик Б.Н., Кириченко М.Ф. Основы теории управления. – К.: Выща школа, 1988.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.