Київський національний університет імені Тараса Шевченка

механіко-математичний факультет

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Укладач(і): *професор Капустян О.В., професор Станжицький О.М.*

Варіаційне числення та методи оптимізації

назва дисципліни

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

для студентів спеціальності: 6.040201 "математика"

шифр і назва напряму (спеціальності)

Затверджено
на засіданні кафедри
Протокол № ___
від "___" ___________ 200_ р.
Зав. кафедри

______________ ______________
Підпис *Прізвище, ініціали*

Декан факультету/ Директор інституту
Городній М.Ф.
Прізвище, ініціали

КИЇВ – 2010

Робоча навчальна програма з дисципліни
«Варіаційне числення та методи оптимізації».
Назва навчальної дисципліни

Укладач(і): доктор фіз.-мат. наук, професор Капустян О.В.,
доктор фіз.-мат. наук, професор Станжицький О.М.

Лектор(и): *доктор фіз.-мат. наук, професор Капустян О.В.*
доктор фіз.-мат. наук, професор Станжицький О.М.
Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали

Викладач(і): *канд. фіз-мат. наук, Ловейкін Ю.В.*
доктор фіз.-мат. наук, професор Станжицький О.М.
Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів), який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття

Погоджено
з науково-методичною комісією
«____» ______________ 200__р.

____
Підпис голови НМК факультету/ інституту

Передмова

Варіаційне числення та методи оптимізації є базовою математичною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Вона викладається на ***IV*** *курсі у 7-му семестрі* в обсязі ***144*** *години (4 кредити)*, з них ***лекцій 36*** *год.*, ***практичних занять 36*** *год.*, ***самостійна робота 72*** *год.* Формою підсумкового контролю є ***іспит***.

Мета і завдання навчальної дисципліни:

Ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії екстремальних задач, характерними прикладами її застосувань, оволодіння базовими методами розв'язування окремих класів задач варіаційного числення та оптимального керування.

Предмет навчальної дисципліни:

Негладкі екстремальні задачі; гладкі екстремальні задачі; задачі класичного варіаційного числення; задачі оптимального керування.

Вимоги до знань та вмінь

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно володіти основами математичного аналізу (зокрема, матеріалом розділів “Границі”, “Похідна”, “Інтеграл Рімана”, “Функціональні ряди”, “Диференціальне числення”, “Існування оберненого відображення та неявної функції”, “Метричні простори”, “Принцип стиснених відображень”), лінійної алгебри (зокрема, матеріалом розділів “Лінійні простори”, “Лінійні оператори”, “Квадратичні форми”), Теорії міри (зокрема, матеріалом розділів "Міра та вимірні функції") Функціональний аналіз (зокрема, матеріалом розділів "Метричні та нормовані простори", "Лінійні функціонали та лінійні оператори", "Простори сумованих функцій").

Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра математики.

Дисципліна “ Варіаційне числення та методи оптимізації ” є складовою циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Її викладанню передує вивчення таких математичних дисциплін, як "Математичний аналіз", "Лінійна алгебра", "Теорія міри", "Функціональний аналіз". У подальшому матеріал курсу "Варіаційне числення та методи оптимізації" використовується при викладанні низки спеціальних курсів.

Система поточного, модульного та підсумкового контролю

Навчальна дисципліна "Диференціальні рівняння" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 2 змістових модулі.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою.

Контроль знань.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Оцінювання за формами контролю:

Поточний –

- *усна відповідь, домашня письмова робота, доповнення – по 1 балу, але в сумі не більше 6 балів за змістовий модуль*
- *письмові самостійні – (1 на змістовий модуль) – 6 балів*
- *модульна контрольна робота – 18 балів*

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною системою, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен із двох модулів у семестрі та оцінки за іспит за наступною формулою.

	Змістовий модуль 1	***Змістовий модуль 2***	***Екзамен***	***Разом (підсумкова оцінка)***
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, кількість балів відповідає оцінці***:***

1 – 34 – «незадовільно» ***з обов'язковим повторним вивченням дисципліни***;
35 – 59 – «незадовільно» ***з можливістю повторного складання***;
60 – 64 – «задовільно» («***достатньо***») ;
65 – 74 – «задовільно»;
75 – 84 – «добре»;
85 – 89 – «добре» («***дуже добре***»);
90 – 100 – «відмінно».

Шкала відповідності[1]

За 100-бальною шкалою	Оцінка іспиту за національною шкалою		Оцінка заліку за національною шкалою
90 – 100	**5**	**відмінно**	***зараховано***
85 – 89	**4**	**добре**	
75 – 84			
65 – 74	**3**	**задовільно**	
60 – 64			
35 – 59	**2**	**незадовільно**	***не зараховано***
1 – 34			

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
Змістовий модуль 1 **Екстремальні задачі**					
1	Негладкі екстремальні задачі	8	8	16	
2	Гладкі екстремальні задачі	8	6	12	
3	Задачі класичного варіаційного числення. Частина 1	6	6	14	
Модульна контрольна робота			2		
Змістовий модуль 2 **Задачі оптимального керування**					
4	Задачі класичного варіаційного числення. Частина 2	6	4	8	
5	Метод динамічного програмування	4	4	10	
6	Принцип максимуму Понтрягіна	4	4	12	
Модульна контрольна робота			2		
	ВСЬОГО	**36**	**36**	**72**	

Загальний обсяг ***144*** *год.,* в тому числі:
Лекцій – ***36*** *год.*
Семінари/лабораторні, практичні – ***36*** *год.*
Самостійна робота – ***72*** *год.*

Змістовий модуль 1. Екстремальні задачі

Тема 1. Негладкі екстремальні задачі

Лекція 1. Виникнення та основні поняття теорії екстремальних задач. Історична довідка. Напівнеперервність функцій. Теорема Вейєрштраса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.

Лабораторна робота 1 (2 год.). Формалізація екстремальних задач [1, п.1.1, 1.2].

Завдання для самостійної роботи 1 (4 год.) Виконати вправи до теми "Формалізація екстремальних задач" [4]. Опрацювати [1, п.1.1, 1.2].

Лекція 2. Задача апроксимації в нормованому просторі. Теорема про апроксимацію в нормованому просторі. Теорема єдиності. Теорема про апроксимацію в гільбертовому просторі.

Лабораторна робота 2 (2 год.)**.** Теореми Вейєрштраса. [1, п. 1.6] [3, п. 1.1, 1.2].

Завдання для самостійної роботи 2 (4 год.). Виконати вправи до теми 1.1 [4]. Опрацювати [1, п. 1.6], [3, п. 1.2].

Лекція 3. Задача опуклої оптимізації. Теорема про відокремлення. Теорема про відокремлення в широкому сенсі. Теорема про нетривіальність спряженого конуса.

Лабораторна робота 3 (2 год.)**.** Задача апроксимації в нормованому просторі. [9, п. 3].

Завдання для самостійної роботи 3 (4 год.) Виконати вправи до теми 1.2 [4]. Опрацювати [9, п. 3].

Лекція 4. Елементарна задача лінійного програмування. Задача опуклої оптимізації. Теорема Куна-Такера. Теорема Куна-Такера у формі сідлової точки.

Лабораторна робота 4 (2 год.)**.** Задачі опуклої оптимізації. [1, п. 1.3], [3, п. 4.1-4.4].

Завдання для самостійної роботи 4 (4 год.) Виконати вправи до теми 1.3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.3], [3, п. 4].

Тема 2. Гладкі екстремальні задачі

Лекція 5. Похідні в нормованому просторі. Означення похідних. Теорема про зв'язок між похідними. Теорема про похідну суперпозиції. Теорема про середнє.

Лабораторна робота 5 (2 год.)**.** Елементи диференціального числення в нормованих просторах. Частина 1. [1, п. 2.2].

Завдання для самостійної роботи 5 (4 год.) Виконати вправи до теми 2.1 [4]. Опрацювати [1, п. 2.2].

Лекція 6. Похідні вищих порядків. Означення похідних вищих порядків. Простір білінійних форм. Теорема про ізоморфізм. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.

Лабораторна робота 6 (2 год.). Елементи диференціального числення в нормованих просторах. Частина 2. [1, п. 2.2].

Завдання для самостійної роботи 6 (4 год.) Виконати вправи до теми 2.2 [4].

Лекція 7. Гладкі задачі з обмеженнями. Лема про замкненість образу. Лема про анулятор підпростору. Лема про анулятор ядра регулярного оператора. Теорема Люстерника.

Лекція 8. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей.

Лабораторна робота 7 (2 год.). Метод Лагранжа. [1, п. 1.3].

Завдання для самостійної роботи 7 (4 год.) Виконати вправи до теми 2.3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.3].

Тема 3. Задачі класичного варіаційного числення. Частина 1

Лекція 9. Задачі класичного варіаційного числення. Лема Лагранжа. Лема Дюбуа-Реймона. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца.

Лекція 10. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в ізопериметричній задачі.

Лабораторна робота 8 (2 год.). Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа). [1, п. 1.4], [3, п. 5.2].

Завдання для самостійної роботи 8 (4 год.) Виконати вправи до теми 3.1 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4], [3, п. 5.2].

Лабораторна робота 9 (2 год.). Задача Больца. [1, п. 1.4], [3, п. 5.1].

Завдання для самостійної роботи 9 (5 год.) Виконати вправи до теми 3.2 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4], [3, п. 5.1].

Лекція 11. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в загальній ізопериметричній задачі. Векторна лема Дюбуа-Реймона. Посилена лема Дюбуа-Реймона.

Лабораторна робота 10 (2 год.). Ізопериметрична задача. [1, п. 1.4], [3, п. 6.1].

Завдання для самостійної роботи 10 (5 год.) Виконати вправи до теми 3.3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4], [3, п. 6.1].

Лабораторна робота 11 (2 год.). Модульна контрольна робота.

Контрольні запитання та завдання.

1. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.
2. Теорема про апроксимацію в нормованому просторі. Теорема єдиності. Теорема про апроксимацію в гільбертовому просторі. Теорема про відокремлення. Теорема про нетривіальність спряженого конуса.
3. Елементарна задача лінійного програмування. Терема Куна-Такера. Теорема Куна Такера у формі сідлової точки.
4. Похідні в нормованому просторі (означення, теорема про зв'язок, контрприклади). Теорема про суперпозицію. Теорема про середнє.
5. Похідні вищих порядків (означення, простір білінійних форм, теорема про ізоморфізм).
6. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.
7. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей.
8. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца.
9. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа.
10. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в ізопериметричній задачі.

Зразок типової модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля

1. Розв'язати задачу $\begin{cases} x+y\to\inf \\ 2x+y\ge 1. \end{cases}$

2. Довести, що відображення $F(x)=(Ax,x)+(a,x)$ двічі диференційовне за Фреше, де $A\in L(H,H)$, $a\in H$, H – гільбертів простір.

3. Розв'язати задачу $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\to\inf \\ x+2y+z=3. \end{cases}$

4. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1(\dot{x}^2(t)+2x(t))dt\to\inf \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

Змістовий модуль 2. Задачі оптимального керування

Тема 4. Задачі класичного варіаційного числення. Частина 2

Лекція 12. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Лагранжа. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Больца.

Лекція 13. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі зі старшими похідними. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій.

Лабораторна робота 12 (2 год.). Задачі зі старшими похідними і векторні задачі. [1, п.1.4], [3, п. 7.1-7.2].

Завдання для самостійної роботи 11 (4 год.) Виконати вправи до теми 3.4 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4], [3, п. 7.1-7.2].

Лекція 14. Необхідна умова Вейєрштрасса сильного локального мінімуму. Лема про спрямлення кутів. Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку.

Лабораторна робота 13 (2 год.). Умови Вейєрштраса, Лежандра, Якобі. [1, п. 3.4], [3, п. 5.5].

Завдання для самостійної роботи 12 (4 год.) Виконати вправи до теми 3.5 [4]. Опрацювати [1, п. 3.4], [3, п. 5.5].

Тема 5. Метод динамічного програмування

Лекція 15. Метод динамічного програмування. Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана.

Лекція 16. Теорема Беллмана. Рівняння Беллмана. Достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.

Лабораторна робота 14 (2 год.) Принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Беллмана задачі оптимальної швидкодії. [5, п. 1.1, 1.2].

Завдання для самостійної роботи 13 (6 год.) Виконати вправи до тем 1.1, 1.2 [5]. Опрацювати [5, п. 1.1, 1.2].

Лабораторна робота 15 (2 год.) Задача аналітичного конструювання лінійного регулятора. Про диференційовність функції Беллмана. [5, п. 1.3, 1.4].

Завдання для самостійної роботи 14 (4 год.) Виконати вправи до тем 1.3, 1.4 [5]. Опрацювати [5, п. 1.3, 1.4].

Тема 6. Принцип максимуму Понтрягіна

Лекція 17. Принцип максимуму Понтрягіна. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца.

Лабораторна робота 16 (2 год.) Задача Майєра. [1, п. 1.5], [3, п. 10.1].

Завдання для самостійної роботи 15 (6 год.) Виконати вправи до теми 2.1 [5]. Опрацювати [1, п. 1.5], [3, п. 10.1].

Лекція 18. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Лабораторна робота 17 (2 год.) Задача оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму. [1, п. 4.3]

Завдання для самостійної роботи 16 (6 год.) Виконати вправи до тем 2.2, 2.3 [5]. Опрацювати [1, п. 4.3].

Лабораторна робота 18 (2 год.)**.** Модульна контрольна робота.

Контрольні запитання та завдання

1. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Лагранжа.
2. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Больца.
3. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі зі старшими похідними.
4. Необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій.
5. Необхідні умови Вейєрштрасса сильного локального мінімуму.
6. Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку.
7. Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана.
8. Теорема Беллмана, рівняння Беллмана. достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана.
9. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.
10. Принцип максимуму Понтрягіна.
11. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца.
12. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії.
13. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля

1. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2(t) - 24tx(t))dt \to \text{extr} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ \ x(1) = 1/5, \ \ \dot{x}(1) = 1. \end{cases}$

2. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - x(t))dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \ \ x(1) = -1. \end{cases}$

3. Розв'язати задачу $\begin{cases} x(2) \to \inf \\ x(0) = 0, \ \ \int_0^2 \dot{x}^2(t)dt = 2, \ \ |\dot{x}| \le 1. \end{cases}$

Перелік питань на іспит

Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.

Теорема про апроксимацію в нормованому просторі. Теорема єдиності. Теорема про апроксимацію в гільбертовому просторі. Теорема про відокремлення. Теорема про відокремлення в широкому сенсі. Теорема про нетривіальність спряженого конуса.

Елементарна задача лінійного програмування. Терема Куна-Такера. Теорема Куна Такера у формі сідлової точки.

Похідні в нормованому просторі (означення, теорема про зв'язок, контрприклади). Теорема про суперпозицію. Теорема про середнє. Похідні вищих порядків (означення, простір білінійних форм, теорема про ізоморфізм). Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.

Лема про замкненість образу. Лема про анулятор підпростору. Лема про анулятор ядра регулярного оператора. Теорема Люстерника.

Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей.

Лема Лагранжа. Лема Дюбуа-Реймона. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в класичній ізопериметричній задачі. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в загальній ізопериметричній задачі.

Векторна лема Дюбуа-Реймона. Посилена лема Дюбуа-Реймона. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Лагранжа. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в векторній задачі Больца. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі зі старшими похідними. Необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій. Необхідні умови Вейєрштрасса сильного локального мінімуму. Лема про спрямлення кутів. Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку.

Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана. Теорема Беллмана, рівняння Беллмана. достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.

Принцип максимуму Понтрягіна. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Рекомендована література

Основна

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 425с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 315с.
3. Алексеев В.М., Галеев Е.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984. – 265с.
4. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Екстремальні задачі. Навчальний посібник – К.: ВПЦ Київський університет, 2004. – 50 с.
5. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Задачі оптимального керування. Навчальний посібник – К.: ТВіМС, 2004. – 55 с.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 250с.
7. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 318с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 460с.

Додаткова

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 544с.
10. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994. – 328с.
11. Пономаренко А.И., Леоненко Н.Н., Борисенко А.Д. Учебные задания к лабораторным занятиям по курсу методы оптимизации. – К.: КГУ, 1986. – 40с.