

Программа курса "Дифференциальные уравнения"

Возникновение теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в прикладных задачах. Основные понятия и объекты.

Решение некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Квазиоднородные уравнения.

Скалярное автономное уравнение первого порядка. Существование и свойства решения задачи Коши.

Элементы качественного анализа линейного уравнения. Достаточные условия существования ограниченного на всей действительной оси решения. Скалярное линейное периодическое уравнение.

Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Существование и единственность решения задачи Коши. Теорема существования Пеано. Теорема Пикара существования и единственности решения. Продолжение решения задачи Коши.

Элементы геометрического анализа дифференциальных уравнений первого порядка. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые. Схема исследования поведения интегральных кривых. Теорема Кнезера. Теорема сравнения.

Уравнения в симметричной форме и двумерные автономные системы. Векторное поле. Автономная система. Классификация фазовых портретов автономных систем в окрестности положения равновесия в линейном приближении. Узел. Седло. Дикритический узел. Вырожденный узел. Фокус. Центр. О корректности метода линеаризации. Теорема Гробмана-Хартмана. О проблеме центра и фокуса.

Неявные дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности решения. Метод параметризации. Уравнение Клеро. и Лагранжа. Геометрия неявного уравнения. Дискриминантные кривые и особые решения.

Интегрирование уравнений высшего порядка. Понижение порядка отдельных типов дифференциальных уравнений высшего порядка. Уравнения, не содержащие искомой функции в явном виде. Автономные уравнения. Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных. Квазиоднородные уравнения. Уравнения в виде полной производной.

Общая теория линейных уравнений. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения высшего порядка. Построение линейного однородного уравнения по его фундаментальной системе решений. Формула Остроградского-Лиувилля.

Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Случаи простых и кратных корней характеристического многочлена. Уравнение Эйлера. Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и квазиполиномом в правой части. Метод неопределенных коэффициентов. Нерезонансный и резонансный случаи. Метод комплексных амплитуд.

Линейные однородные системы. Теорема существования и единственности решения линейной однородной системы. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Обобщение метода Эйлера. Матричная экспонента.

Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Линейные неоднородные системы с постоянной матрицей и квазиполиномиальным свободным членом. Метод неопределенных коэффициентов.

Колеблемость решений линейных однородных уравнений второго порядка. Основные теоремы: теорема сравнения, теорема Штурма, теорема о неколеблемости.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с регулярными особыми точками. Отыскание решений с помощью обобщенных степенных рядов. Уравнения Гаусса, Лежандра и Бесселя.

Краевые задачи. Функция Грина.

Основные свойства решений систем дифференциальных уравнений. Теорема Пеано. Единственность и продолжение решений. Свойства решения нормальной системы как функции начальных данных и параметров. Непрерывность в естественной области определения. Дифференцируемость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений.

Теория первых интегралов. Определение, геометрическая интерпретация и аналитический критерий первого интеграла. Функционально независимые первые интегралы. Полный набор первых интегралов. Решения задачи Коши с помощью полного набора первых интегралов. Первые интегралы автономной системы и системы в симметричной форме.

Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову. Устойчивость линейных систем. Устойчивость линейной системы с постоянной матрицей. Теорема об устойчивости по первому приближению. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.

Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения в частных первого порядка. Метод характеристик. Задача Коши.