

## Програма курсу "Диференціальні рівняння"

Виникнення теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння у прикладних задачах. Основні поняття та об'єкти.

Розв'язування деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати. Квазіоднорідні рівняння.

Скалярне автономне рівняння першого порядку. Існування та властивості розв'язку задачі Коші.

Елементи якісного аналізу лінійного рівняння. Достатні умови існування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку. Скалярне лінійне періодичне рівняння.

Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема існування Пеано. Теорема Пікара існування та єдності розв'язку. Продовження розв'язку задачі Коші.

Елементи геометричного аналізу диференціального рівняння першого порядку. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Поле напрямів. Інтегральні криві. Схема дослідження поведінки інтегральних кривих. Теорема Кнезера. Теорема порівняння.

Рівняння у симетричній формі та двовимірні автономні системи. Векторне поле. Автономна система. Класифікація фазових портретів автономних систем у околі положення рівноваги у лінійному наближенні. Вузол. Сідло. Дикритичний вузол. Вироджений вузол. Фокус. Центр. Про коректність методу лінеаризації. Теорема Гробмана-Хартмана. Про проблему центра и фокуса.

Неявні диференціальні рівняння. Теорема існування та єдності розв'язку. Метод параметризації. Рівняння Клеро і Лагранжа. Геометрія неявного рівняння. Дискримінантні криві та особливі розв'язки.

Інтегрування рівнянь вищого порядку. Зниження порядку окремих типів диференціальних рівнянь вищого порядку. Рівняння, що не містять шукану функцію у явному вигляді. Автономні рівняння. Рівняння, однорідні відносно шуканої функції та її похідних. Квазіоднорідні рівняння. Рівняння у вигляді повної похідної.

Загальна теорія лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків і загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку. Побудова лінійного однорідного рівняння за його фундаментальною системою розв'язків. Формула Остроградського-Ліувілля.

Лінійні однорідні рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадки простих і кратних коренів характеристичного многочлена. Рівняння Ейлера. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами і квазіполіномом у правій частині. Метод невизначених коефіцієнтів. Нерезонансний та резонансний випадки. Метод комплексних амплітуд.

Лінійні однорідні системи. Теорема існування та єдності розв'язку лінійної однорідної системи. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера. Узагальнення методу Ейлера. Матрична експонента.

Лінійні неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Лінійні неоднорідні системи зі сталою матрицею і квазіполіноміальним вільним членом. Метод невизначених коефіцієнтів.

Коливність розв'язків лінійних однорідних рівнянь другого порядку. Основні теореми: теорема порівняння, теорема Штурма, теорема про неколивність.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з регулярними особливими точками. Відшукання розв'язків за допомогою узагальнених степеневих рядів. Рівняння Гаусса, Лежандра и Бесселя.

Крайові задачі. Функція Гріна.

Основні властивості розв'язків систем диференціальних рівнянь. Теорема Пеано. Єдиність та продовжуваність розв'язку. Властивості розв'язків нормальної системи як функції початкових даних та параметрів. Неперервність у природній області визначення. Диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими даними і параметрами. Асимптотичні розвинення розв'язків диференціальних рівнянь..

Теорія перших інтегралів. Означення, геометрична інтерпретація та аналітичний критерій першого інтеграла. Функціонально незалежні перші інтеграли. Повний набір перших інтегралів. Розв'язання задачі Коші за допомогою повного набору перших інтегралів. Перші інтеграли автономної системи та системи у симетричній формі..

Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим. Стійкість лінійних систем. Стійкість лінійної системи зі сталою матрицею. Теорема про стійкість за першим наближенням. Функції Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість. Теорема Четаєва про нестійкість.

Диференціальні рівняння у частинних похідних першого порядку. Лінійні та квазілінійні диференціальні рівняння у частинних похідних першого порядку. Метод характеристик. Задача Коші.