

Программа курса

«Интегральные уравнения и элементы функционального анализа»

Понятие интегрального уравнения. Интегральные уравнения в прикладных задачах. Классификация интегральных уравнений.

Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Сведение вопроса о разрешимости интегрального уравнения к вопросу разрешимости системы линейных алгебраических уравнений. Определитель Фредгольма. Характеристические числа, собственные функции. Сопряженное уравнение. Теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

Принцип сжатых отображений. Теорема Банаха. Обобщение теоремы Банаха. Применение принципа сжатых отображений к решению уравнения Фредгольма 2-го рода и уравнения Вольтерра 2-го рода. Применение принципа сжатых отображений к решению некоторых классов нелинейных интегральных уравнений.

Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Сходимость в пространстве $L(E, E_1)$. Произведение линейных непрерывных операторов. Обратный оператор. Свойства обратного оператора. Теорема Банаха (об обратном операторе).

Уравнение Фредгольма 2-го рода. Ряд Неймана. Повторные ядра. Резольвента. Свойства резольвенты. Уравнение Вольтерра 2-го рода. Построение резольвенты.

Теоремы Фредгольма для уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром. Резольвентное множество и спектр линейного оператора.

Компактные операторы. Свойства. Гильбертово пространство. Сопряженный оператор. Уравнение Риса-Шаудера. Симметричные операторы в гильбертовом пространстве. Компактные симметричные операторы в гильбертовом пространстве. Собственные значения и собственные векторы компактного симметричного оператора.

Процесс ортогонализации системы линейно независимых элементов в линейном пространстве со скалярным произведением.

Теорема Гильберта-Шмидта. Применение теоремы Гильберта-Шмидта к решению операторных уравнений. Формулы Шмидта. Интегральные уравнения с симметричным ядром.

Понятие корректно поставленной задачи. Анализ интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с точки зрения корректности постановки задачи.

Уравнение Вольтерра 1-го рода. Сведение к уравнению Вольтерра 2-го рода.

Интегральные уравнения Вольтерра с ядром $K(t, s) = \frac{1}{(t-s)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Уравнение

Абеля.

Интегро-дифференциальные уравнения. Примеры задач, которые приводят к интегро-дифференциальным уравнениям. Интегро-дифференциальные уравнения с интегральными операторами типа Вольтерра и Фредгольма.