

Програма курсу

«Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу»

Поняття інтегрального рівняння. Інтегральні рівняння у прикладних задачах. Класифікація інтегральних рівнянь.

Рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром. Зведення питання розв'язності інтегрального рівняння до питання розв'язності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Визначник Фредгольма. Характеристичні числа, власні функції. Спряжене рівняння. Теореми Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

Принцип стислих відображень. Теорема Банаха. Узагальнення теореми Банаха. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання рівняння Фредгольма 2-го роду та рівняння Вольєрра 2-го роду. Застосування принципу стислих відображень до розв'язання деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь.

Лінійні нормовані простори. Банахові простори. Лінійні оператори. Неперервність та обмеженість. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Збіжність у просторі $L(E, E_1)$.

Добуток лінійних неперервних операторів. Обернений оператор. Властивості оберненого оператора. Теорема Банаха (про обернений оператор).

Рівняння Фредгольма 2-го роду. Ряд Неймана. Повторні ядра. Резольвента. Властивості резольвенти. Рівняння Вольєрра 2-го роду. Побудова резольвенти.

Теореми Фредгольма для рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром.

Резольвентна множина та спектр лінійного оператора.

Компактні оператори. Властивості. Гільбертів простір. Спряжений оператор. Рівняння Ріса-Шаудера. Симетричні оператори в гільбертовому просторі. Компактні симетричні оператори в гільбертовому просторі. Власні значення та власні вектори компактного симетричного оператора.

Процес ортогоналізації системи лінійно незалежних елементів у лінійному просторі зі скалярним добутком.

Теорема Гільберта-Шмідта. Застосування теореми Гільберта-Шмідта до розв'язання операторних рівнянь. Формули Шмідта. Інтегральні рівняння з симетричним ядром.

Поняття коректно поставленої задачі. Аналіз інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з точки зору коректності постановки задачі.

Рівняння Вольєрра 1-го роду. Зведення до рівняння Вольєрра 2-го роду.

Інтегральні рівняння Вольєрра з ядром $K(t, s) = \frac{1}{(t-s)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Рівняння Абеля.

Інтегро-диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до інтегро-диференціальних рівнянь. Інтегро-диференціальні рівняння з інтегральними операторами типа Вольєрра і Фредгольма.