

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**механіко-математичний факультет**

*кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь*

**Укладач:** доцент Ловейкін Ю.В.

*Нормативний курс “Диференціальні рівняння”*

**РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**

для студентів спеціальності:

“математика”

*шифр і назва напрямку (спеціальності)*

**Затверджено**

на засіданні кафедри

Протокол № \_\_\_\_\_

від “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2012 р.

*Зав. кафедри*

\_\_\_\_\_ Перестюк М.О.

*Підпис*                      *Прізвище, ініціали*

Декан факультету/

Директор інституту

\_\_\_\_\_ Городній М.Ф.

*Підпис*                      *Прізвище, ініціали*

**Київ – 2012**

Робоча навчальна програма зі спеціального курсу  
“Диференціальні рівняння”  
*Назва навчальної дисципліни*

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.

**Лектор:** кандидат фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.  
*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали*

**Викладач(і):** кандидат фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.  
*Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів), який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття*

**Погоджено**  
з науково-методичною комісією  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 р.

\_\_\_\_\_  
*Підпис голови НМК факультету/ інституту*

## Передмова

Диференціальні рівняння є базовою математичною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Вона викладається на **II курсі** в обсязі **144 години (4 кредити)**, з них **лекцій 12 год., практичних занять 6 год., самостійна робота 126 год.** Формами підсумкового контролю є **залік**.

### **Мета і завдання навчальної дисципліни:**

Ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії диференціальних рівнянь, характерними прикладами її застосувань, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами дослідження та розв'язування окремих класів диференціальних рівнянь.

### **Предмет навчальної дисципліни:**

Скалярні та векторні звичайні диференціальні рівняння першого порядку; задачі про відшукування, існування, єдиність, залежність від початкових даних та параметрів розв'язків диференціальних рівнянь.

### **Вимоги до знань та вмінь**

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно володіти основами курсів "Математичний аналіз" (зокрема, матеріалом розділів "Границі", "Похідна", "Інтеграл Рімана", "Функціональні ряди", "Диференціальне числення функцій кількох змінних", "Існування оберненого відображення та неявної функції", "Метричні простори", "Принцип стиснених відображень"), "Лінійна алгебра" (зокрема, матеріалом розділів "Лінійні простори", "Лінійні оператори", "Жорданова нормальна форма", "Квадратичні форми"), "Аналітична геометрія" (зокрема, матеріалом розділів "Системи координат", "Криві другого порядку").

### **Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра математики.**

Дисципліна "Диференціальні рівняння" є складовою циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Її викладанню передують вивчення таких математичних дисциплін, як "Аналітична геометрія", "Математичний аналіз", "Лінійна алгебра". Паралельно з нею узгоджено, шляхом взаємного обміну необхідними поняттями та фактами вивчаються такі дисципліни, як "Математичний аналіз", "Диференціальна геометрія та топологія". У подальшому матеріал курсу "Диференціальні рівняння" використовується при викладанні таких дисциплін: "Рівняння математичної фізики", "Функціональний аналіз", "Варіаційне числення та методи оптимізації", "Теоретична механіка", "Теоретична фізика", низки спеціальних курсів.

### **Система поточного, модульного та підсумкового контролю**

Навчальна дисципліна "Диференціальні рівняння" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 2 змістовних модулі.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою.

### **Контроль знань.**

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Оцінювання за формами контролю:

#### ***Поточний*** –

*два модульних контрольних завдання, що виконуються студентами в поза-аудиторні години і здаються викладачу в письмовій формі – 60 балів.*

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною системою, яка розраховується як сума оцінок за кожен із двох модулів та оцінки підсумкового контролю за наступною формулою.

|                            | <i>Змістовний модуль 1</i> | <i>Змістовний модуль 2</i> | <i>Іспит, залік, інші форми контролю</i> | <i>Разом (підсумкова оцінка)</i> |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--|----------------------------------|
| Максимальна оцінка в балах | 30                         | 30                         | 40                                       | 100                              |
| Оцінка (бали)              | 30                         | 30                         | 40                                       | 100                              |

***При цьому, кількість балів*** відповідає оцінці:

**1 - 34** – «незадовільно» ***з обов'язковим повторним вивченням дисципліни,***

**35 - 59** – «незадовільно» ***з можливістю повторного складання,***

**60 - 64** – «задовільно» (***«достатньо»***);

**65 - 74** – «задовільно»;

**75 - 84** – «добре»;

**85 - 89** – «добре» (***«дуже добре»***);

**90 - 100** – «відмінно».

### **Шкала відповідності**

| За 100-бальною шкалою | Оцінка іспиту за національною шкалою |                   | Оцінка заліку за національною шкалою |                     |
|-----------------------|--------------------------------------|-------------------|--------------------------------------|---------------------|
| <b>90 – 100</b>       | <b>5</b>                             | <b>відмінно</b>   | <b><i>зараховано</i></b>             |                     |
| <b>85 – 89</b>        | <b>4</b>                             | <b>добре</b>      |                                      |                     |
| <b>75 – 84</b>        |                                      | <b>задовільно</b> |                                      |                     |
| <b>65 – 74</b>        |                                      |                   |                                      |                     |
| <b>60 – 64</b>        | <b>3</b>                             | <b>задовільно</b> |                                      |                     |
| <b>35 – 59</b>        |                                      |                   | <b>2</b>                             | <b>незадовільно</b> |
| <b>1 – 34</b>         |                                      |                   |                                      |                     |

## НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

| № теми  | Назва теми  | Кількість годин |                                     |                   |                         |
|---|---|-----------------|-------------------------------------|-------------------|-------------------------|
|   |   | лекції          | семінари/<br>лаборат.,<br>практичні | самост.<br>робота | Інші<br>форми<br>контр. |
| <b>Змістовний модуль 1</b>  |   |                 |                                     |                   |                         |
| <b>Скалярні диференціальні рівняння першого порядку</b>             |   |                 |                                     |                   |                         |
| 1   | Інтегрування окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку            | 4               | 2                                   | 34                |                         |
| 2   | Рівняння в повних диференціалах та інтегрувальний множник                     | 2               | 2                                   | 30                |                         |
| Модульна контрольна робота  |   |                 |                                     |                   |                         |
| <b>Змістовний модуль 2</b>  |   |                 |                                     |                   |                         |
| <b>Елементи загальної теорії диференціальних рівнянь на площині</b> |   |                 |                                     |                   |                         |
| 3   | Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку | 2               | 1                                   | 30                |                         |
| 4   | Неявні рівняння та особливі розв'язки   | 4               | 1                                   | 32                |                         |
| Модульна контрольна робота  |   |                 |                                     |                   |                         |
|   | <b>ВСЬОГО</b>   | <b>12</b>       | <b>6</b>                            | <b>126</b>        |                         |

Загальний обсяг **144 год.**, в тому числі:

Лекцій – **12 год.**

Семінари/лабораторні, практичні – **6 год.**

Самостійна робота – **126 год.**

## **Змістовий модуль 1.**

### **Скалярні диференціальні рівняння першого порядку**

#### **Тема 1. Інтегрування окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку**

**Лекція 1.** Виникнення та основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Геометричні та фізичні задачі, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Розв'язок. Задача Коші. Поле напрямів. Інтегральна крива. Рівняння з відокремлюваними змінними.

**Лекція 2.** Заміни змінних в диференціальних рівняннях 1-го порядку. Однорідне та квазіоднорідне рівняння. Лінійне рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккаті.

**Практичне заняття 1** (2 год.). Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні та квазіоднорідні рівняння. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. [2, п. 1.2, 1.4, 1.5].

**Завдання для самостійної роботи 1** (34 год.). Опрацювати матеріал [1, п.п. 1.1.1–1.1.4], [2, п.п. 1.2, 1.4, 1.5].

#### **Тема 2. Рівняння в повних диференціалах та інтегрувальний множник**

**Лекція 3.** Рівняння в повних диференціалах. Означення рівняння в повних диференціалах. Інтегрування в квадратурах. Інтегрувальний множник. Деякі способи відшукування інтегрувального множника.

**Практичне заняття 2** (2 год.). Розв'язування рівнянь в повних диференціалах. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою інтегрувального множника. [2, п. 1.6].

**Завдання для самостійної роботи 2** (30 год.) Опрацювати матеріал [1, п.п. 1.7.1, 1.7.2], [2, п. 1.6].

#### **Контрольні запитання та завдання.**

1. Розв'язок диференціального рівняння, поле напрямів, інтегральна крива.
2. Рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідне та квазіоднорідне рівняння.
4. Лінійне рівняння.
5. Рівняння Бернуллі.
6. Означення та коефіцієнтний критерій рівняння в повних диференціалах.
7. Інтегрування рівняння у повних диференціалах.
8. Означення інтегрувального множника.
9. Методи відшукування інтегрувального множника.

#### **Зразок типової модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля**

1. Розв'язати рівняння:  $y' - xy^2 = 2xy$ .

2. Розв'язати рівняння:  $x^2 y' + xy + 1 = 0$ .
3. Розв'язати рівняння:  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ .
4. Розв'язати рівняння:  $2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}$ .
5. Методом інтегрувального множника розв'язати рівняння:  $dx + (x + y^2 e^y) dy = 0$ .

## ***Змістовий модуль 2.***

### **Елементи загальної теорії диференціальних рівнянь на площині**

#### ***Тема 3. Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку***

***Лекція 4.*** Теореми Пеано та Пікара. Продовження розв'язку задачі Коші.

***Практичне заняття 3*** (1 год.). Застосування теореми. Продовження розв'язку задачі Коші [1, п. 1.4], [2, п. 1.7],

**Завдання для самостійної роботи 3** (30 год.) Опрацювати матеріал [1, п. 1.4], [2, п. 1.7], [3, § 7].

#### ***Тема 4. Неявні рівняння та особливі розв'язки***

***Лекція 5.*** Рівняння, не розв'язані відносно похідної. Теорема існування та єдиності розв'язку неявного рівняння. Поняття єдиності розв'язку. Метод параметризації.

***Лекція 6.*** Інтегрування та геометрична інтерпретація неявного рівняння. Особливі розв'язки. Методи відшукування особливих розв'язків.

***Практичне заняття 4*** (1 год.). Інтегрування неявних рівнянь методом параметризації. Особливі розв'язки. [2, п. 1.8], [3, §8].

**Завдання для самостійної роботи 4** (32 год.) Опрацювати матеріал [1, п.п. 1.10.1, 1.10.2, 1.10.4], [2, п.1.8], [3, §8].

#### ***Контрольні запитання та завдання***

1. Задача Коші для рівняння 1-го порядку.
2. Сформулювати теорему Пікара.
3. Сформулювати теорему Пеано. Навести приклад, коли умови цієї теореми не гарантують єдиність розв'язку задачі Коші.
4. Сформулювати теорему про продовження розв'язку. Що таке непродовжуваний розв'язок.
5. Задача Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.
6. Сформулювати теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.

7. Метод параметризації для розв'язування рівняння не розв'язаного відносно похідної.
8. Особливий розв'язок рівняння не розв'язаного відносно похідної.
9. Способи відшукання особливих розв'язків.

### **Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля**

1. Перевірити виконання умов теореми Пікара та знайти перші три послідовні наближення  $y' = x - y^2$ ,  $y(2) = 1$ ,  $|x - 2| \leq 1$ ,  $|y - 1| \leq 3$ .
2. Розв'язати рівняння та знайти розв'язок задачі Коші  $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ ,  $M(1;1)$ .
3. Знайти особливий розв'язок, якщо в результаті інтегрування диференціального рівняння одержано співвідношення  $C^2 - 2(x - C)^2 = 4y$ .

### **Перелік питань на залік**

Розв'язок диференціального рівняння, поле напрямів, інтегральна крива.

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Однорідне та квазіоднорідне рівняння.

Лінійне рівняння.

Рівняння Бернуллі.

Означення та коефіцієнтний критерій рівняння в повних диференціалах.

Інтегрування рівняння у повних диференціалах.

Означення інтегрувального множника.

Методи відшукання інтегрувального множника.

Задача Коші для рівняння 1-го порядку.

Сформулювати теорему Пікара.

Сформулювати теорему Пеано. Навести приклад, коли умови цієї теореми не гарантують єдиність розв'язку задачі Коші.

Сформулювати теорему про продовження розв'язку. Що таке непродовжуваний розв'язок.

Задача Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.

Сформулювати теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.

Метод параметризації для розв'язування рівняння не розв'язаного відносно похідної.

Особливий розв'язок рівняння не розв'язаного відносно похідної.

Способи відшукання особливих розв'язків.



## **Рекомендована література**

### **Основна**

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. – Київ:Либідь, 2003
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985.
4. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь – Київ: Либідь, 2004.

### **Додаткова**

5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. Наука, 1984.
6. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. – Київ: Либідь, 2004.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958.
8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967.

## **Змістовна програма курсу "Диференціальні рівняння"**

Розв'язок диференціального рівняння, поле напрямів, інтегральна крива.

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Однорідне та квазіоднорідне рівняння.

Лінійне рівняння.

Рівняння Бернуллі.

Означення та коефіцієнтний критерій рівняння в повних диференціалах.

Інтегрування рівняння у повних диференціалах.

Означення інтегрувального множника.

Методи відшукування інтегрувального множника.

Задача Коші для рівняння 1-го порядку.

Сформулювати теорему Пікара.

Сформулювати теорему Пеано. Навести приклад, коли умови цієї теореми не гарантують єдиність розв'язку задачі Коші.

Сформулювати теорему про продовження розв'язку. Що таке непродовжуваний розв'язок.

Задача Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.

Сформулювати теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної.

Метод параметризації для розв'язування рівняння, не розв'язаного відносно похідної.

Особливий розв'язок рівняння, не розв'язаного відносно похідної.

Способи відшукування особливих розв'язків рівняння, не розв'язаного відносно похідної.

## Содержательная программа курса "Дифференциальные уравнения"

Решение дифференциального уравнения, поле направлений, интегральная кривая.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Однородное и квазиоднородное уравнение.

Линейное уравнение.

Уравнение Бернулли.

Определение и коэффициентный критерий уравнения в полных дифференциалах.

Интегрирование уравнения в полных дифференциалах.

Определение интегрирующего множителя.

Методы нахождения интегрирующего множителя.

Задача Коши для уравнения первого порядка.

Сформулировать теорему Пикара.

Сформулировать теорему Пеано. Привести пример, когда условия этой теоремы не гарантируют единственности решения задачи Коши.

Сформулировать теорему о продолжении решения. Что называется непродолжаемым решением.

Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Метод параметризации для решения уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Особое решение уравнения, не разрешенного относительно производной.

Способы отыскания особых решений уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

## Course program "Differential equations"

Solution of differential equation, the direction field, the integral curve.

Equation with separable variables.

Homogeneous and quasihomogeneous equation.

A linear equation.

Bernoulli equation.

Definition and coefficient criteria of total differential equations.

Integration of total differential equation.

The definition of an integrating factor.

Methods for finding an integrating factor.

Cauchy problem for the first order differential equation.

The theorem of Picard.

Formulation of the theorem of Peano. Bring the example, when the conditions of the theorem does not guarantee uniqueness of the solution of the Cauchy problem.

Formulate the theorem on the extension decision. What is called the nonextendable solution.

Cauchy problem for the first order, not solved for the derivative.

The theorem on the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the first order differential equation, not solved for the derivative.

Parameterization method for the solution of the first order differential equation, not solved for the derivative.

A special solution of the equation not solved for the derivative.

Ways to find special solutions of the first order differential equation not solved for the derivative.