Київський національний університет імені Тараса Шевченка

механіко-математичний факультет

кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Укладач(і): *доцент Ловейкін Ю.В.*

Варіаційне числення та методи оптимізації

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

для студентів спеціальності: ______________________ "математика"

шифр і назва напряму (спеціальності)

Затверджено
на засіданні кафедри
Протокол № ___
від "___" ___________ *2012 р.*
Зав. кафедри

___________ Перестюк М.О.
Підпис *Прізвище, ініціали*

Декан факультету/ Директор інституту

___________ *Городній М.Ф.*
Підпис *Прізвище, ініціали*

КИЇВ – 2012

Робоча навчальна програма з дисципліни
"Варіаційне числення та методи оптимізації"
Назва навчальної дисципліни

Укладач(і): *канд. фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.*

Лектор(и): *канд. фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.*
Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали

Викладач(і): *канд. фіз.-мат. наук Ловейкін Ю.В.*
Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів), який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття

Погоджено
з науково-методичною комісією
«____» ______________ 2012 р.

____
Підпис голови НМК факультету/ інституту

Передмова

Варіаційне числення та методи оптимізації є базовою математичною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Вона викладається на ***V*** *курсі у 9-му семестрі* в обсязі ***144 години*** *(4 кредити)*, з них ***лекцій 12*** *год.*, ***практичних занять 4*** *год.*, ***самостійна робота 128*** *год.* Формою підсумкового контролю є ***іспит***.

Мета і завдання навчальної дисципліни:

Ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії екстремальних задач, характерними прикладами її застосувань, оволодіння базовими методами розв'язування окремих класів задач варіаційного числення та оптимального керування.

Предмет навчальної дисципліни:

Негладкі екстремальні задачі; гладкі екстремальні задачі; задачі класичного варіаційного числення; задачі оптимального керування.

Вимоги до знань та вмінь

Для успішного засвоєння матеріалу студенту необхідно володіти основами математичного аналізу (зокрема, матеріалом розділів “Границі”, “Похідна”, “Інтеграл Рімана”, “Функціональні ряди”, “Диференціальне числення”, “Існування оберненого відображення та неявної функції”, “Метричні простори”, “Принцип стиснених відображень”), лінійної алгебри (зокрема, матеріалом розділів “Лінійні простори”, “Лінійні оператори”, “Квадратичні форми”), Теорії міри (зокрема, матеріалом розділів "Міра та вимірні функції") Функціональний аналіз (зокрема, матеріалом розділів "Метричні та нормовані простори", "Лінійні функціонали та лінійні оператори", "Простори сумованих функцій").

Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра математики.

Дисципліна “Варіаційне числення та методи оптимізації” є складовою циклу професійної та практичної підготовки бакалавра математики. Її викладанню передує вивчення таких математичних дисциплін, як "Математичний аналіз", "Лінійна алгебра", "Теорія міри", "Функціональний аналіз". У подальшому матеріал курсу "Варіаційне числення та методи оптимізації" використовується при викладанні низки спеціальних курсів.

Система поточного, модульного та підсумкового контролю

Навчальна дисципліна "Варіаційне числення та методи оптимізації" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона поділена на 2 змістових модулі.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою.

Контроль знань

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.
Оцінювання за формами контролю:

Поточний –
два модульних контрольних завдання, що виконуються студентами в поза-аудиторні години і здаються викладачу в письмовій формі – 60 балів.

За результатами семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною системою, яка розраховується як сума оцінок за кожен із двох модулів у семестрі та оцінки за іспит за наступною формулою.

	Змістовий модуль 1	***Змістовий модуль 2***	***Екзамен***	***Разом (підсумкова оцінка)***
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, кількість балів відповідає оцінці***:***
1 – 34 – «незадовільно» ***з обов'язковим повторним вивченням дисципліни***;
35 – 59 – «незадовільно» ***з можливістю повторного складання***;
60 – 64 – «**з**адовільно» («***достатньо***») ;
65 – 74 – «задовільно»;
75 – 84 – «добре»;
85 – 89 – «добре» («***дуже добре***»);
90 – 100 – «відмінно».

Шкала відповідності

<table>
<tr><th>За 100-бальною шкалою</th><th colspan="2">Оцінка іспиту за національною шкалою</th><th>Оцінка заліку за національною шкалою</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>5</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>85 – 89</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>75 – 84</td></tr>
<tr><td>65 – 74</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60 – 64</td></tr>
<tr><td>35 – 59</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">незадовільно</td><td rowspan="2">не зараховано</td></tr>
<tr><td>1 – 34</td></tr>
</table>

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самост. робота	Інші форми контр.
Змістовий модуль 1 **Задачі варіаційного числення**					
1	Негладкі екстремальні задачі	2		20	
2	Гладкі екстремальні задачі	2	1	24	
3	Задачі класичного варіаційного числення.	4	1	36	
Модульна контрольна робота					
Змістовий модуль 2 **Задачі оптимального керування**					
4	Метод динамічного програмування	2	1	24	
5	Принцип максимуму Понтрягіна	2	1	24	
Модульна контрольна робота					
	ВСЬОГО	**12**	**4**	**128**	

Загальний обсяг ***144*** *год.*, в тому числі:
Лекцій – ***12*** *год.*
Семінари/лабораторні, практичні – ***4*** *год.*
Самостійна робота – ***128*** *год.*

Змістовий модуль 1.
Задачі варіаційного числення

Тема 1. Негладкі екстремальні задачі

Лекція 1. Виникнення та основні поняття теорії екстремальних задач. Напівнеперервність функцій. Теореми Вейєрштрасса. Задача опуклої оптимізації. Теорема Куна-Такера.

Завдання для самостійної роботи 1 (20 год.). Виконати вправи до тем 1.1, 1.3 [4]. Опрацювати [1, пп. 1.3, 1.6], [3, пп. 1.2, 4].

Тема 2. Гладкі екстремальні задачі

Лекція 2. Похідні в нормованому просторі. Означення похідних. Теорема про зв'язок між похідними. Теорема про похідну суперпозиції. Теорема про середнє. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень. Теореми про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей та нерівностей.

Практичне заняття 1 (1 год.). Елементи диференціального числення в нормованих просторах. Метод Лагранжа. [1, пп. 1.3, 2.1, 2.2].

Завдання для самостійної роботи 2 (24 год.) Виконати вправи до тем 2.1–2.3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.3, 2.2].

Тема 3. Задачі класичного варіаційного числення

Лекція 3. Задачі класичного варіаційного числення. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца та задачі Лагранжа.

Завдання для самостійної роботи 3 (18 год.) Виконати вправи до теми 3.1, 3.2 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4], [3, п. 5.1, 5.2].

Лекція 4. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в ізопериметричній задачі. Умови Вейєрштрасса, Лежандра, Якобі.

Практичне заняття 2 (1 год.). Задача Лагранжа. Задача Больца. Ізопериметрична задача. [1, п. 1.4], [3, п. 5.1, 5.2].

Завдання для самостійної роботи 4 (18 год.) Виконати вправи до тем 3.3, 3.5 [4]. Опрацювати [1, п. 1.4, 3.4], [3, п. 5.5, 6.1].

Контрольні запитання та завдання.
1. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.
2. Елементарна задача лінійного програмування. Терема Куна-Такера.
3. Похідні в нормованому просторі (означення, теорема про зв'язок, контрприклади). Теорема про суперпозицію.

4. Похідні вищих порядків (означення, простір білінійних форм, теорема про ізоморфізм).
5. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.
6. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей.
7. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей.
8. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца.
9. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа.
10. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в ізопериметричній задачі.
11. Необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій.
12. Необхідні умови Вейєрштрасса сильного локального мінімуму.
13. Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку.
14. Достатні умови слабкого та сильного локальних мінімумів.

Зразок типової модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля

1. Розв'язати задачу $\begin{cases} x+y \to \inf \\ 2x+y \geq 1. \end{cases}$

2. Довести, що відображення $F(x)=(Ax,x)+(a,x)$ двічі диференційовне за Фреше, де $A \in L(H,H)$, $a \in H$, H – гільбертів простір.

3. Розв'язати задачу $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \to \inf \\ x+2y+z=3. \end{cases}$

4. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}^2(t)+2x(t))dt \to \inf \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

Змістовий модуль 2.
Задачі оптимального керування

Тема 4. Метод динамічного програмування

Лекція 5. Метод динамічного програмування. Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана. Теорема Беллмана. Рівняння Беллмана. Достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.

Практичне заняття 3 (1 год.) Принцип оптимальності Беллмана. Задача аналітичного конструювання лінійного регулятора. [4, п. 5.1–5.3].

Завдання для самостійної роботи 5 (24 год.) Виконати вправи до тем 5.1–5.3 [4]. Опрацювати [4, п. 5.1–5.4].

Тема 5. Принцип максимуму Понтрягіна

Лекція 6. Принцип максимуму Понтрягіна. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Практичне заняття 4 (1 год.) Задача Майєра. Задача оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму. [1, п. 1.5, п. 4.3], [3, п. 10.1].

Завдання для самостійної роботи 6 (24 год.) Виконати вправи до тем 6.1–6.3 [4]. Опрацювати [1, п. 1.5, п. 4.3], [3, п. 10.1].

Контрольні запитання та завдання
1. Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана.
2. Теорема Беллмана, рівняння Беллмана.
3. Достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана.
4. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.
5. Принцип максимуму Понтрягіна.
6. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца.
7. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії.
8. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Зразок типової модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля

1. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2(t) - 24tx(t))dt \to \text{extr} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \;\; x(1) = 1/5, \;\; \dot{x}(1) = 1. \end{cases}$

2. Розв'язати задачу $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - x(t))dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = -1. \end{cases}$

3. Розв'язати задачу $\begin{cases} x(2) \to \inf \\ x(0) = 0, \ \int_0^2 \dot{x}^2(t)dt = 2, \ |\dot{x}| \le 1. \end{cases}$

Перелік питань на іспит

Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.

Елементарна задача лінійного програмування. Теорема Куна-Таккера.

Похідні в нормованому просторі (означення, теорема про зв'язок, контрприклади). Теорема про суперпозицію. Теорема про середнє.

Похідні вищих. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.

Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей. Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей

Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа. Необхідні умови слабкого локального мінімуму в класичній ізопериметричній задачі.

Необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій. Необхідні умови Вейєрштрасса сильного локального мінімуму. Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку. Достатні умови слабкого та сильного локальних мінімумів.

Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана. Теорема Беллмана, рівняння Беллмана. достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана. Аналітичне конструювання лінійного регулятора.

Принцип максимуму Понтрягіна. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії. Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Рекомендована література

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 425 с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 315 с.
3. Алексеев В.М., Галеев Е.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984. – 265 с.
4. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. Навч. посібн. – К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 144 с.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 250 с.
6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 318 с.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 460с.

8. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Екстремальні задачі. Навч. посібн. – К.: ВПЦ Київський університет, 2004. – 50 с.
9. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Задачі оптимального керування. Навч. посібн. – К.: ТВіМС, 2004. – 55 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
11. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994. – 328 с.
12. Пономаренко А.И., Леоненко Н.Н., Борисенко А.Д. Учебные задания к лабораторным занятиям по курсу методы оптимизации. – К.: КГУ, 1986. – 40 с.

Змістовна програма курсу
Варіаційне числення та методи оптимізації

Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій. Теорема Вейєрштрасса для напівнеперервних знизу функцій в банаховому просторі.

Елементарна задача лінійного програмування. Теорема Куна-Таккера.

Похідні в нормованому просторі (означення, теорема про зв'язок, контрприклади).

Теорема про суперпозицію. Теорема про середнє.

Похідні вищих порядків. Необхідні і достатні умови екстремуму в гладких задачах без обмежень.

Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу рівностей.

Теорема про необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями типу нерівностей.

Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца.

Необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Лагранжа.

Необхідні умови слабкого локального мінімуму в ізопериметричній задачі.

Необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Лагранжа для кусково-гладких функцій. Необхідні умови Вейєрштрасса сильного локального мінімуму.

Необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку. Достатні умови слабкого та сильного локальних мінімумів.

Функція Беллмана. Теорема про властивості функції Беллмана.

Теорема Беллмана, рівняння Беллмана. достатні умови оптимальності в термінах рівняння Беллмана.

Аналітичне конструювання лінійного регулятора.

Принцип максимуму Понтрягіна. Принцип максимуму Понтрягіна в задачі Больца.

Принцип максимуму Понтрягіна в задачі оптимальної швидкодії.

Достатні умови оптимальності в формі принципу максимуму.

Содержательная программа курса
Вариационное исчисление и методы оптимизации

Теорема Вейерштрасса для полунепрерывных снизу функций. Теорема Вейерштрасса для полунепрерывных снизу функций в банаховом пространстве.

Элементарная задача линейного программирования. Теорема Куна-Таккера.

Производные в нормированном пространстве (определение, теорема о связи, контрпримеры).

Теорема о суперпозиции. Теорема о среднем.

Производные высших порядков. Необходимые и достаточные условия экстремума в гладких задачах без ограничений.

Теорема о необходимых условиях экстремума в гладких задачах с ограничениями типа равенств.

Теорема о необходимых условиях экстремума в гладких задачах с ограничениями типа неравенств.

Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Больца.

Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Лагранжа.

Необходимые условия слабого локального минимума в изопериметрической задаче.

Необходимые условия сильного локального минимума в задаче Лагранжа для кусочно-гладких функций. Необходимые условия Вейерштрасса сильного локального минимума.

Необходимые условия слабого локального минимума 2-го порядка. Достаточные условия слабого и сильного локальных минимумов.

Функция Беллмана. Теорема о свойствах функции Беллмана.

Теорема Беллмана, уравнение Беллмана. Достаточные условия оптимальности в терминах уравнения Беллмана.

Аналитическое конструирование линейного регулятора.

Принцип максимума Понтрягина. Принцип максимума Понтрягина в задаче Больца.

Принцип максимуму Понтрягина в задаче оптимального быстродействия.

Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума.

Course program
Variational calculus and optimization methods

Weierstrass theorem for lower semicontinuous functions. Weierstrass theorem for lower semicontinuous functions in Banach space.

Elementary linear programming problem. Kuhn-Tucker theorem.

Derivatives in a normalized space (definition, theorem of communication, counterexamples).

The theorem on the superposition. The mean value theorem.

Higher-order derivatives. Necessary and sufficient optimality conditions in smooth problems without constraints.

The theorem on the necessary conditions of smooth problems with equality constraints.

The theorem on the necessary conditions of smooth problems with inequality constraints.

The necessary conditions for a weak local minimum in a Boltz problem.

The necessary conditions for a weak local minimum in a Lagrange problem.

The necessary conditions for a weak local minimum in a isoperimetric problem.

The necessary conditions for strong local minimum in the Lagrange problem for piecewise smooth functions. Weierstrass necessary condition of a strong local minimum.

The necessary conditions for a weak local minimum of second order. Sufficient conditions for weak and strong local minima.

Bellman function. Theorem on the properties of the Bellman function.

Bellman theorem. Bellman equation. Optimality conditions in terms of the Bellman equation.

Analytical design of linear regulator.

Pontryagin maximum principle. Pontryagin maximum principle in a Boltz problem.

Pontryagin maximum principle in an optimal speed problem.

Optimality conditions in the form of the Pontryagin maximum principle.